2

Percentagens

Formulário

800% = 800/100 = 8
80% = 80/100 = 0,8
8% = 8/100 = 0,08
0,8% = 0,8/100 = 0,008

32% = 32/100 = 0,32
3,2% = 3,2/100 = 0,032
0,32% = 0,32/100 = 0,0032
0,032% = 0,032/100 = 0,00032

Em geral:

$$p\ \% = \frac{p}{100}$$

100% <---> tudo
50% <---> metade
25% <---> um quarto
20% <---> um quinto
10% <---> um décimo

60% <---> um pouco mais da metade
40% <---> quase a metade

Não posso pedir 100% de abatimento, mas posso ter 100% de aumento de salário, e mesmo 200%.

Aumento <-------> percentual positivo
Diminuição <-------> percentual negativo

Tomar (20% de A) = 0,20 A

Se de um valor A passamos para um valor B, e
- se houve <u>aumento</u> de 25%, então B = 1,25 A ;
- se houve <u>diminuição</u> de 25%, então B = 0,75 A .

Evite erros graves sempre tendo em vista que, ao passar de um valor A para um valor B com

.aumento de 100%: A → B = A + 100% A = A + A = 2A = dobra
.aumento de 200%: A → B = A + 200% A = A + 2A = 3A = triplica

.diminuição de 100%: A → B = A – 100% A = A – A = 0 (cuidado!)
.diminuição de 200%: A → B = A – 200% A = A – 2A = -A (cuidado!)

Problemas de composição de percentagens são resolvidos por <u>multiplicação</u>!

Exemplificando, se de um valor A passamos a um valor B
. aumento de 20%, <u>seguido</u> de aumento de 30%: B = 1,20 x 1,30 A = 1,56 A, aumento de 56%;
. aumento de 20%, <u>seguido</u> de diminuição de 30%: B = 1,20 x 0,70 A = 0,84 A, diminuiu 16%.

1).- O que é uma percentagem?

Seguindo um velho costume dos comerciantes e banqueiros, ficou popular expressar grandezas em termos de uma *centena* de vezes de sua unidade (poderíamos ter escolhido uma dezena, um milhar, uma dúzia ou qualquer outro múltiplo da unidade).

Assim, dizer que “ganhei R$ 0,08 para cada R$ que apliquei naquele negócio”, equivale a dizer que “ganhei R$ 0,8 para cada R$ 10 que apliquei”, ou que “ganhei R$ 8 para cada R$ 100 que apliquei”. Esta última alternativa, ao menos neste caso, é mais fácil de ser assimilada, e costuma ser expressa abreviadamente como “ganhei 8% do que apliquei naquele negócio”. Isso é um primeiro exemplo ilustrando a ideia da percentagem.

O símbolo da percentagem é %
e tem esta forma porque é uma abreviação de /100 (ou seja, de “dividido por 100”). Exemplificando:

800% = 800/100 = 8	32% = 32/100 = 0,32
80% = 80/100 = 0,8	3,2% = 3,2/100 = 0,032
8% = 8/100 = 0,08	0,32% = 0,32/100 = 0,0032
0,8% = 0,8/100 = 0,008	0,032% = 0,032/100 = 0,00032

Toda percentagem é uma razão a/b da forma a/100. Por exemplo: 8% é o mesmo que 8 por 100. Em geral:

$$p\ \% = \frac{p}{100}$$

Acima, note que p é um número real; em particular, a menos que p seja um número inteiro, a expressão p/100 não será uma fração centesimal, ao contrário do que muitos livros dizem.

Também note que *só podemos escrever a expansão decimal de p%* quando conhecermos o valor numérico de p. Isso é a principal fonte da confusão que a maioria dos livros faz sobre o assunto percentagem. Insistindo: 7,5% = 7,5/100 = 0,075, mas com p genérico só posso escrever: p% = p/100.

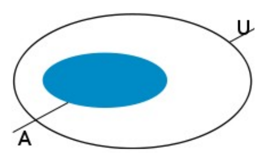
2).- Problema: como calcular o percentual de uma parte relativamente a um todo?

Mostremos o procedimento usando um exemplo.
Se temos 28 páginas de publicidade numa revista de 80 páginas, qual o percentual de publicidade na revista?
Temos 28 pag publ. para 80 pag rev, ou seja 28/80 pag publ para 1 pag rev, o que é o mesmo que 0,35 pag publ para 1 pag rev, de modo que temos 0,35 X 100 pag publ para cada 100 pag rev, ou seja: 35 pag publ para 100 pag rev, o que é abreviado como “temos 35% de publicidade na revista”.
Na prática, trabalhamos mais rapidamente: 28/80 = 0,35 = 35% (pois 0,35 = 35/100).

Para achar o percentual de elementos de uma parte A de um conjunto U, calculamos:

$$p = \frac{\text{medida de A}}{\text{medida de U}}$$

e expressamos o valor de p em %.
(exemplo: p = 0,35 = 35%)



Com a fórmula acima, podemos resolver três tipos de problemas: tendo A e U, achar p; tendo p e A, achar U; e tendo p e U, achar A. Vejamos um exemplo numérico de cada.
Exemplo (A, U) → p
Numa turma de 30 estudantes, 20 deles são meninas. Qual o percentual de meninas na turma?

Temos U = 30, A =20, logo a turma é composta de p = 20/30 = 0,666 = 66,6% de meninas.

Exemplo (p, A) → U
Um total de 3 390 eleitores votaram na cidade XYZ, o que corresponde a 75% do eleitorado desta cidade. Quantos eleitores tem a cidade?
Temos votantes/eleitores = 75% = 0,75, logo: eleitores = votantes/0,75 = 3 390/0,75 = 4 520.

Exemplo (p, U) → A
Das 720 lâmpadas de uma escola, 62,5% delas estavam queimadas. Achar o número de lâmpadas queimadas.
Temos queimadas/total = 62,5% = 0,625, logo: lâmpadas queimadas = 0,625 X 720 = 450.

3).- Problemas de aumento e diminuição percentual

Exemplo -
No início do ano, José tinha R$ 4 000 de economias, que chegaram a R$ 4 500 no fim do ano. Dizemos que suas economias tiveram uma variação de 4 500 – 4 000 = 500 reais (ou que aumentaram de 500 reais), e uma *variação **relativa*** de 500/4000 = 0,125 = 12,5%. Também dizemos que suas economias aumentaram 12,5%.

Exemplo -
No início do ano, José tinha R$ 4 000 de economias, mas elas baixaram para R$ 3 500 no fim do ano. Dizemos que suas economias tiveram uma variação de 3 500 – 4 000 = - 500 reais (ou que diminuiram 500 reais), e uma *variação **relativa*** de -500/4000 = -0,125 = - 12,5%. Também dizemos que suas economias diminuiram 12,5% (note que o “diminuiram” dispensa o sinal negativo).

Aumento <-------> percentual positivo
Diminuição <-------> percentual negativo

Em geral, se uma grandeza passar de um valor A para um valor B, sua variação é B – A, e sua

variação *relativa*= p = $\frac{B-A}{A}$

Fundamental
Entender isto!

disso, tiramos: B = A + pA = (1 + p) A

Exemplo -
Uma fábrica, que produzia 240 unidades por ano, teve sua produtividade aumentada em 30%. Quantas unidades ela está fabricando anualmente?
Temos “aumento de 30%” = p = + 30% = 0,30, logo B = (1+0,30) A = 1,30 X 240 = 312. Ou seja, a fábrica está produzindo 312 unidades por ano.
(Na prática, abreviamos esses cálculos para B = 1,30 A = 1,30 X 240 = 312 .)

Exemplo -
Uma fábrica, que produzia 240 unidades por ano, teve sua produtividade diminuída em 30%. Quantas unidades ela está fabricando anualmente?
Agora, “diminuição de 30%” = p = - 30% = -0,30, logo B = (1-0,30) A = 0,70 X 240 = 168.
(Na prática, abreviamos esses cálculos para B = 0,70 A = 0,70 X 240 = 168 .)

Se de um valor A passamos para um valor B, e
- se houve aumento de 25%, então B = 1,25 A
- se houve diminuição de 25%, então B = 0,75 A.

Evite erros graves sempre tendo em vista que, ao passar de um valor A para um valor B com

.aumento de 100%: A → B = A + 100% A = A + A = 2A = dobra
.aumento de 200%: A → B = A + 200% A = A + 2A = 3A = triplica

.diminuição de 100%: A → B = A – 100% A = A – A = 0 (cuidado!)
.diminuição de 200%: A → B = A – 200% A = A – 2A = -A (cuidado!)

Pontos percentuais

A expressão "pontos percentuais" é bastante empregada nos meios de comunicação, mas é mais uma invenção brasileira; dificilmente aparecerá em problemas olímpicos. Seu significado pode ser facilmente entendido a partir de alguns exemplos:

* se a inflação subiu de 5% para 10%, podemos dizer que houve um aumento de 100% na inflação, e também dizer que a inflação subiu cinco pontos percentuais;
* se o imposto XYZ subiu de 2% para 3%, é a mesma coisa dizer que o aumento foi de 50% e dizer que o imposto subiu um ponto percentual ;
* se a taxa de juros passou de 20% para 50%, esse aumento pode ser descrito como sendo um aumento de 150% ou como sendo um aumento de 30 pontos percentuais.

4).- Problemas de composição de percentagens (= evolução percentual por etapas)

Estamos falando de situações como a seguinte:
se a inflação de novembro foi 3% e a de dezembro foi 5%, qual a inflação total nestes dois meses?

A enorme maioria das pessoas acha que esse tipo de problema é resolvido por soma. Isto é totalmente falso:

Problemas de composição de percentagens são resolvidos por multiplicação!

Comprovemos!
Se no início de novembro um produto custava A reais, no início de dezembro ele custará A reais mais 3% de A, ou seja: custará B = A + 0,03A = 1,03 A, e no início de janeiro estará custando B' = B + 0,05B = 1,05 B = 1,05 x 1,03 A = 1,0815 A. Consequentemente, a inflação total foi de 8,15%. (O que é diferente de 3% + 5% = 8%.)
Alguém poderia observar que, no exemplo acima, a diferença entre o valor correto da inflação total (8,15%) e o valor errado dado pela grande maioria das pessoas (o 3% + 5% = 8%) foi bem pequeno.
Contudo, *a diferença seria grande se os percentuais envolvidos também fossem grandes*. Por exemplo, a composição de um crescimento percentual de 30% com um de 50% é dada por 1,30 x 1,50 = 1,95, o que corresponde a um crescimento total de 95%, bem maior do que o valor errado 30% + 50% = 80%.

Vejamos alguns modelos de problemas de composição de percentagens.

Exemplo -
Nas férias de verão, José engordou 20% em janeiro e 10% em fevereiro, enquanto que Maria engordou 10% em janeiro e 20% em fevereiro. Quem engordou mais?
Resp.
como podemos fazer o produto de dois números em qualquer ordem, sem alterar o resultado, é desnecessario fazer qualquer conta para ver que *os dois engordaram o mesmo percentual*. Contudo, como este é um primeiro exemplo, façamos os cálculos para mostrar bem explicitamente o que foi afirmado.
(peso de José no final) = 1,10 x 1,20 x (peso de José no início de jan.)
(peso de Maria no final) = 1,20 x 1,10 x (peso de Maria no início de jan.)

Exemplo -
Se nossa veranista Maria tivesse engordado 10% em jan, mas emagrecido 10% em fev, qual o efeito total?
Resp.
pelo que já vimos e alertamos, V. deve estar em melhor situação que a maioria dos vestibulandos, os quais acham que o efeito total é zero (pois 10 - 10 = 0). Claro que não é, pois 1,10 x 0,90 não dá 1, mas 0,99. Ou seja: Maria emagreceu 0,01 = 1% de seu peso, pois 1 – 0,01 = 0,99.

Um alta e uma baixa de mesmo valor *percentual nunca se anulam!*
Seu efeito total sempre é uma diminuição.

Exemplo -
José tem uma dívida de R$ 300 numa loja, a qual cobra juros de 0,5% ao mês. Sendo que ele está há 8 meses sem fazer pagamentos, quanto ele está devendo?
Resp.
A cada mês sua dívida aumenta em 0,5%, o que equivale dizer que ela passa de A para A + 0,5%A ou seja, passa de A para 1,005 A. De modo que teremos, em oito meses:

$$300 \to 1{,}005\times300 \to 1{,}005\times(1{,}005\times300)=1{,}005^2\times300 \to 1{,}005\times(1{,}005^2\times300)=1{,}005^3\times300=\cdots$$
$$\cdots=1{,}005^8\times300=1{,}040707\times300=312,21\ .$$

Exemplo – (muito importante, não deixe de entender e guardar)
A incidência da malária vinha dobrando a cada 2 anos. Qual o aumento percentual annual equivalente?
Resp.
Indicando por p o percentual procurado, em dois anos a quantidade de malarientos passa de M para M' tal que $M' = 2M$, mas também $M' = (1+p)^2\,M$. De modo que $(1+p)^2 = 2$, e então
$$p = \sqrt{2}-1 \simeq 1{,}414-1 = 0{,}414 = 41{,}4\%\ .$$

Ou seja, o número de malarientos vinha aumentando 41,4% ao ano.
Vale a pena enfatizar: “um aumento de 100% <u>bianual</u>” equivale a “um aumento de 41,4% <u>anual</u>”.
Voce também pode comprovar isso *diretamente*: $(1+1)A = 1{,}414^2\,A$

Exercício -
Mostre que um aumento bimensal de 40% equivale a um aumento mensal de 18,3%.

Exercício -
Mostre que uma diminuição annual de 40% equivale a uma diminuição semestral de 22,5% .

5).- Exercícios didáticos

Exercício -
José foi ao banco e aplicou R$ 2 500 numa poupança. Esta rendeu 5% no primeiro ano, 8% no segundo, 13% no terceiro e 21% no quarto ano. Pede-se:
a). seu saldo no final do quarto ano.
b). o rendimento percentual equivalente por ano.
c). alguns autores, em vez de dizerem “redimento percentual equivalente”, falam em “rendimento percentual médio”, o que tende a fazer confusão com a “média aritmética dos rendimentos”; calcule essa média e compare-a com o rendimento equivalente achado em (b).
Resp.
a)- B = 1,05 x 1,08 x 1,13 x 1,21 x 2500 = 3876,30
b)- $B=(1+p)^4\ A$, logo 3876.30 = $(1+p)^4$ 2500, de onde $1+p = \sqrt[4]{3876{,}30/2500}$ = 1,1159, de modo que p = 0,1159 = 11,59% .
c)- média (aritmética) dos rendimentos é 47%/4 = 11,75%.

Exercício -
Completar a tabela abaixo:

Etapa 1	Etapa 2	Resultante
Aumento de 20%	Aumento de 10%	Aumento de 32%
Aumento de 10%	Diminuição de 10%	
Aumento de 10%	Aumento de 20%	
Aumento de 10%	Aumento de 10%	
Diminuição de 20%	Diminuição de 20%	
Aumento de 10%	Diminuição de 5%	
Aumento de 25%	Diminuição de 20%	
Diminuição de 3,2%	Diminuição de 6.8%	
Aumento de 12,5%		Aumento de 38,75%
Diminuição de 25%		Diminuição de 36,25%
	Diminuição de 36%	Constante (não há mudança)

Exercício -
Aumentando de 12% cada lado de um quadrado, de que percentual aumentamos a área?
Resp. 25,44%

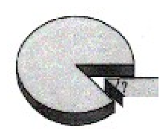
Exercício -
Continue os cálculos seguintes, concluindo com o resultado expresso em expansão decimal e depois em percentos: (1+20%)(1+30%) = 1 + 20% + 30% + 20% 30% = 1,50 + 20% 30% = ...
Confira sua resposta com (1+20%)(1+30%) = 1,20 x 1,30 = ...

Exercício -
Se um produto teve um aumento de 8%, de qual percentual deverá ele diminuir para voltar ao preço original?
Resp.: 7,41% . Que cálculo V. deve fazer para confirmar esta resposta? Por que a maioria das pessoas acham que a resposta é “diminuir 8%”?

Prática

1).- Treinamento olímpico

Exercício -
A figura representa um queijo redondo do qual foi cortada uma fatia de 15% do seu tamanho. Pede-se o valor do ângulo associado, em graus.
Resp.: 54^o



Exercício -
O mineral bauxita contém 24% de alumina, e a eletrólise desta produz 53% de alumínio. Pede-se uma fórmula que permita calcular a quantidade de alumínio que se consegue produzir a partir de uma dada quantidade de bauxita.
Resp.: A = 0,1272 B

Exercício -
Um barril está com 70% de sua capacidade ocupada. Nessa condição, ele tem 30 litros a mais do que tinha quando estava com 30% de sua capacidade. Qual é sua capacidade máxima?
Resp.: 75 litros

Exercício -
Um supermercado está com a seguinte promoção: “Leve a segunda caixa pela metade do preço”. Que percentual de economia permite essa promoção?
Resp.: 25%

Exercício-
Os honorários de uma agência de propaganda são compostos de duas parcelas: o custo de produção (atores, filmes, etc) e uma comissão de 15% sobre o custo de produção. Por sua vez o IR (Imposto de Renda) cobra da agência um imposto que:
- *era de 5% do valor da comissão*
- *passou a ser 5% do valor da comissão e mais 5% dos honorários.*

Pergunta-se:
- *que percentual da comissão o IR representava? E agora?*
- *o novo lucro é que percentual do antigo? Isso justifica a reclamação das agências?*

Resp: 5%, 43.3%, 59.7%

Exercício -
Um quadrado tem $400\ cm^2$ *de área. De qual percentual devemos diminuir seu lado para que a área diminua 20% ?*
Resp.: aprox 10,6%

Exercício – (nível II)
Na beirada de um canteiro circular de jardim, foi feita uma calçada circular que aumentou a área do canteiro em 96%. Sendo de 4 m a largura de tal calçada, achar o raio do canteiro original.
Resp.: 10 m.

Exercício –
Explique por que o seguinte método funciona se, num restaurante, V. quiser acrescentar uma gorjeta de 15% à despesa D:
primeiro escrevo o valor D; segundo, movo a vírgula decimal de D uma casa para a esquerda e escrevo essa quantidade embaixo de D; terceiro, divido essa última quantidade por 2 e escrevo o resultado dessa divisão; o total a pagar é a soma das 3 quantias escritas.

Exercício –
Após reportagem em programa televisivo de grande audiência, uma das maiores multinacionais do setor de alimentos publicou matéria paga defedendo-se de ter reduzido o peso de seus produtos. Nessa matéria, a multinacional disse: "Reduzimos o peso de nossa linha de biscoitos wafer de 200 gramas para 150 gramas. Mas, também o preço do produto foi reduzido, em 20%".
Pergunta-se: V. concorda com a explicação?
Resp.: 25% e 20% são valores bem diferentes.

Exercício –
Escreveu um dos mais famosos jornalistas do país: "Dos R$ 23 milhões do Orçamento para a Agricultura Familiar, até agora foram gastos apenas R$ 800 mil, ou seja: apenas 0.4%".
Pede-se calcular o percentual correto e então explicar o porquê do erro do jornalista.

Exercício –
Há uma semana, o armazém vendia uma dúzia de ovos e 10 maçãs pelo mesmo preço. Agora, o preço dos ovos está 10% mais barato e o das maçãs 2% mais caro. Quanto gastarei a mais (em %) para comprar uma dúzia de ovos e 10 maçãs?
Resp.: 4%

2).- Problemas olímpicos

Exercício – (ORM 2013)
Um hospital veterinário hospeda apenas cachorros e gatos. Hoje, está hospedando 10% mais gatos do que cachorros. Do total de animais hospedados, que percentual corresponde aos gatos.
Resp. 0, 524 = 52, 4% dos animais hospedados.

Exercício – (ORM 2013)
José quer preparar laranjada e iniciou enchendo completamente com água uma jarra. A seguir, tirou 10% dessa água e completou a jarra com suco puro de laranja. Depois de misturar bem, como achou que ficou fraca, retirou mais 10% do conteúdo da jarra e completou com suco puro de laranja. Finalmente, repetiu mais uma vez a operação, isto é: retirou 10% da última mistura e completou com o suco puro de laranja.
Qual é a quantidade percentual de suco puro de laranja que ficou na jarra?
Resp.: 27, 1% de suco puro de laranja.

Exercício -
Um comerciante tinha 100 Kg de morangos, cujo teor de umidade era 99% e que eram vendidos a R$30 por Kg. Sendo que hoje a umidade deles baixou para 98%, ele quer saber como remarcar o preço de modo a não ter prejuízo.
Resp.: R$ 60 por Kg.

Exercício -
Ao contrário da ideia popular, a ocorrência dos ciclo verão-inverno não é governada pela maior ou menor proximidade da Terra em relação ao Sol, mas pela inclinação do eixo de rotação da Terra em relação aos raios do Sol. Contudo, pode-se observar que o verão do hemisferio-sul (HS) é mais quente do que o verão do hemisferio-norte (HN). Para isso aponta-se duas causas:
- *no verão do HS, a Terra está 4% mais próxima do Sol do que na época do verão HN;*
- *o HS tem mais oceanos.*

Pede-se: levando em conta apenas a primeira dessas causas, calcular em % o quanto o verão do HS é mais quente do que o do HN.
(NOTA: por "mais quente" queremos dizer "recebe mais energia calorífica" .)
Resp.: 8,5%

Exercício -
O preço P de uma mercadoria sofreu um aumento de a%, depois sofreu uma baixa de b%, a qual fêz o preço voltar ao valor original P. Mostrar que $b=\frac{100\,a}{a+100}$.

Exercício – (nível II, difícil)
Um colar de pérolas tem menos de 500 peças, as quais podem ser pérolas grandes ou pequenas. Substituindo 70% das grandes por pequenas, o peso do colar diminui 60%, e substituindo 60% das pequenas por grandes, o peso aumenta 70%. Quantas pérolas tem o colar?
Resp.: 85, 170, 255, 340 ou 425 pérolas.