3.

PROPORÇÕES DIRETAS SIMPLES

1).– Ideia de proporcionalidade direta

Estudaremos aqui situações onde temos duas variáveis numéricas, que denotaremos por x e y, tais que cada possível valor de x determina exatamente um valor de y e, além disso, essa correspondência entre os valores dessas variáveis tem *uma característica muito especial:* sempre que multiplicarmos o valor de x por um número qualquer, o correspondente valor de y também fica multiplicado pelo mesmo número.
Ou seja: se dobrarmos o valor de x, também dobramos o de y; se triplicarmos x, também triplicamos y; se tomarmos a metade de x (o que é o mesmo que multiplicar o valor de x por $\frac{1}{2}$), também reduzimos y à metade; e assim por diante. Em geral, se a variável x variar de um valor $x = x'$ para um novo valor $x = cx'$, obrigatoriamente a variável y passará do valor $y = y'$, que correspondia a x', para o novo valor $y = cy'$.

> Nesses casos muito especiais, dizemos que **a variável y é *diretamente proporcional* à variável x** e abreviamos isso com a notação $y \propto x$.

2).– Reconhecimento de uma proporcionalidade direta

Para podermos afirmar que uma variável y é diretamente proporcional a uma variável x, não basta sabermos que cada possível valor de x determina exatamente um valor de y! Somos obrigados a testar se essa relação de dependência tem a *muito especial característica* que destacamos acima.
Precisamos testar se sempre que $x \to cx$ também ocorrerá que $y \to cy$, para todas as possibilidades do número c. Isso é o que chamamos de **teste de reconhecimento** da proporcionalidade direta.

> É um vício comum trazido da Escola, e fonte de erros graves, tentar resolver problemas de proporcionalidade sem fazer o teste de reconhecimento, se resumindo a aplicar mecanicamente receitas como a obsoleta Regra de Três!

Exemplo –
Um jardineiro apara a grama de um canteiro quadrado de 4m de lado em 10 min. Que tempo precisará para aparar a grama de um canteiro quadrado de 8m de lado?
Antes de mais nada, identifiquemos as variáveis envolvidas no problema. Temos x = lado do canteiro e y = tempo para aparar um canteiro quadrado de lado x. O teste de reconhecimento mostra facilmente que este *y não é diretamente proporcional a x*. Com efeito, se dobrarmos o lado do canteiro, por exemplo $4 \to 8$, a sua área não dobra (ela passa de $16 \to 64$), logo o tempo para aparar a grama não dobra também.
Em particular, *não tem o menor sentido* querer resolver esse problema pela Regra de Três!

Vejamos várias maneiras de fazermos o Teste do Reconhecimento de uma proporção direta.

- **Teste das razões:**
  a razão entre os valores de y e os correspondentes x é constante:
  $$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3} = \frac{y_4}{x_4} = \cdots = m$$
  (a constante m é denominada <u>*coeficiente de proporcionalidade*</u> entre y e x);

  caracterização tabular:
  se colocarmos todos os valores de x na primeira linha de uma tabela e os correspondente valores de y na segunda linha, então existe uma constante m que multiplicando os valores da primeira linha produz os da segunda linha (esta constante é o <u>*coeficiente de proporcionalidade):*</u>

x_1	x_2	x_3	x_4	etc.
y_1	y_2	y_3	y_4	etc.

m

- **Caracterização algébrica do Teste de Reconhecimento:**
  conseguindo uma fórmula expressando os valores de y em termos dos de x, verificamos se esta fórmula é do tipo y = mx, para todos os possíveis valores de x
  (a constante m é denominada <u>*coeficiente de proporcionalidade*</u> entre y e x).

- **Caracterização geométrica da proporcionalidade direta:**
  se no plano cartesiano desenharmos o gráfico da correspondência entre os x e os y, o resultado é uma reta passando pela origem do sistema de eixos.

Exemplo -
Sendo dado que $y \propto x$, completar o quadro abaixo. Inicie achando o coeficiente de proporcionalidade que permite passar dos valores da primeira linha da tabela para a segunda

x		3	5	9
y	8	12		

Exemplo -
É dado que a tabela abaixo resume alguns valores de uma função y = y(x). Pergunta-se se $y \propto x$. Equivalentemente: existe uma constante que por multiplicação permite passar da primeira linha para a segunda?

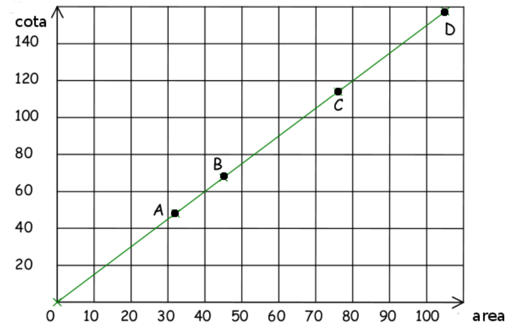
Exemplo -
Achar os valores de a, b, c, d para que as sequências (a, 5, 13, b) e (147, 35, d, 70) sejam proporcionais.

Exemplo -
A tabela abaixo dá as cotas condominiais dos apartamentos de um edifício em função da área de cada um. Pede-se localizar num sistema de eixos cartesianos os correspondentes pontos (área, cota) e, então, decidir se as cotas são proporcionais às áreas.

Área (m^2)	32	45	76	105
Cota (R$)	48	67,5	114	157,5
ponto	A	B	C	D

Pode-se afirmar que existe uma constante que nos permite passar de áreas para cotas, via multiplicação?

Resp.:



- **Caracterização da proporcionalidade direta por meio de taxas:**

  Indiquemos por y=y(x) o fato de que há uma relação de dependência qualquer (não necessariamente de proporcionalidade direta) dos valores da variável numérica y em relação aos valores de x; mais precisamente, que cada valor de x determina exatamente um valor de y.

  Sendo y = y(x), a <u>*taxa de variação de y ao x variar*</u> de um valor x_1 para um valor x_2 é definida como sendo:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \text{ , onde } y_1 = y(x_1) \text{ e } y_2 = y(x_2) \text{ .}$$

  Dizer que $y \propto x$ equivale a dizer que a taxa de variação de y em relação a x é constante (tem sempre o mesmo valor, quaisquer que sejam x_1 e x_2 .)

  Com efeito: $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{mx_2 - mx_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{m(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = m$.

  Exemplificando:

  no caso do condomínio do ex. anterior: $\dfrac{114-48}{76-32} = 1{,}5 = \dfrac{114-67{,}5}{76-45}$.

3).– Problemas de projeção

A estrutura deste tipo de problemas é a seguinte:

> tendo-se reconhecido que $y \propto x$, deseja-se determinar o valor y_1 de y que está associado a um valor dado x_1 de x.

Já sabemos que valer $y \propto x$ equivale a dizer que existe uma certa constante m tal que $y = mx$, para todos os possíveis x; esta constante m é a *constante de proporcionalidade* entre x e y. Então, para que um problema de projeção possa ser resolvido é necessário que tenhamos condições de calcular sua constante de proporcionalidade. Uma vez determinado o valor de m, a projeção desejada é obtida calculando o produto $y_1 = mx_1$.

É muito comum de o valor de m ser dado indiretamente, por meio de um par (x_2, y_2) verificando $y \propto x$, pois como tem de valer $y_2 = mx_2$, disso segue que $m = \frac{y_2}{x_2}$, e daí $y_1 = \frac{y_2}{x_2} \cdot x_1$.

Antigamente, isso tudo era escrito no formato da Regra de Três:

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} \quad \Rightarrow \quad y_1 = \frac{y_2}{x_2} \cdot x_1 \,.$$

Por outro lado, é importante observar que é possível conseguir fazer a projeção sem calcular explicitamente o coeficiente de proporcionalidade m. Por exemplo, se constatarmos que $y \propto x$, e o problema nos fornecer o valor y_2 do y associado a $x = x_2$, e se for pedido o y associado a um x_1 que é o triplo de x_2, então o correspondente y_1 é o triplo de y_2. Exemplos análogos para o dobro, a metade, a terça parte, e em geral: se $x_1 = cx_2$, então $y_1 = cy_2$.

Exemplo –
Um jardineiro apara a grama de um canteiro quadrado de 4m de lado em 10 min. Que tempo precisará para aparar a grama de um canteiro quadrado de 8m de lado?

Já vimos que o teste de reconhecimento mostra facilmente que o tempo y para aparar a grama *não é diretamente proporcional ao lado x* do canteiro. Com efeito, o que determina o tempo de trabalho do jardineiro é a área do canteiro e esta, por exemplo, não dobra ao dobrarmos o lado do canteiro. Consequentemente, é totalmente errado afirmar que o tempo para aparar o canteiro de lado 8 m é o dobro do tempo para aparar o canteiro de lado 4 m.

Uma vez entendido isso, fica fácil vermos que temos é de usar que o tempo varia em proporção direta com a área do canteiro, e como a área passou de $4 \times 4 = 16\text{m}^2$ para $8 \times 8 = 64\text{m}^2$, ou seja *quadruplicou*, o tempo também quadruplica, ou seja: o jardineiro precisará $4 \times 10 = 40$ minutos para aparar o novo canteiro.
(Note, em particular, que resolvemos o problema sem calcular explicitamente o coeficiente de proporcionalidade.)

Existe uma infinidade de problemas em Física, Química, Finanças, etc. que se traduzem como problemas de projeção de proporcionalidade direta. No que segue, abordaremos apenas duas aplicações; problemas de escala e problemas de modelagem ou divisão proporcional.

4).- Problemas de escalas

Um caso importante de projeção de proporcionalidade direta ocorre na feitura de maquetes e
e de desenhos, principamente na feitura de mapas. Nesses casos, é mantida a proporção entre os elementos métricos (comprimentos, áreas, ângulos, etc.) das duas figuras. Mais precisamente: trabalha-se com **figuras semelhantes.**

Duas figuras geométricas são <u>semelhantes</u> quando a qualquer ponto P da primeira pode-se fazer corresponder um ponto P' da segunda (dito seu <u>homólogo</u>), e reciprocamente; e isso de tal modo que a razão entre a distância de cada dois pontos da primeira e a distância de seus homólogos na segunda seja constante:

$$A'B' = m\, AB.$$

Ou seja, os comprimentos na primeira figura são proporcionais aos da segunda.
O coeficiente m é dito <u>fator de redução</u> se $0 < m < 1$, e <u>fator de aumento</u> se $m>1$.

Noção de escala -
Principalmente no contexto de mapas, especificamos a redução de figuras dizendo que a figura *mapa* representa a figura *terreno* na escala 1: k (onde k tipicamente é uma potência de 10). Com isso se quer dizer que cada metro no mapa corresponde a k metros no terreno.

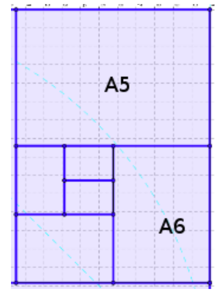
Consequentemente, como cada comprimento L no terreno corresponde a um comprimento L' no mapa, tal que L' = m L, temos 1 = mk, logo m = 1/k.
Por exemplo, fazer um mapa na escala 1:100 equivale a fazer um mapa no qual cada metro no mapa corresponde a 100 m no terreno, ou em termos mais práticos: cada centímetro no mapa corresponde a 100 cm no terreno. O coeficiente de proporcionalidade é m = 1/100 = 0,01.

Exemplo –
Maria fez uma foto de uma árvore de 15 m de altura. Em sua foto a árvore mede 5 cm, logo a escala da foto é 0.05/15 = 5/1500 = 1/300 = 1:300.
(NOTE que a escala *não é* 5/15. Em escala, usamos <u>a mesma unidade de medida</u> para o objeto real e o objeto representado.)

Exemplo –
Um campo oficial de futebol é um retângulo de 90m X 120 m. Qual seria o comprimento de um campo semelhante que tem 54 m de largura? Qual a escala?
Resp.:
A escala é 54/90 = 3/5. O comprimento pode ser achado pela relação de semelhança:
120/90 = c/54, logo c = 54 x 120/90 = 72 m. Também podemos achar o comprimeno multiplicando o comprimento 120 do campo oficial pela escala. Por quê?

Exemplo –
Maria quer desenhar a Torre Eiffel numa folha de papel A4 (21 cm por 29.7 cm). Usando a Internet, ela viu que a torre tem aproximadamente 324 m de altura e que a abertura de seus pés é de 125m. Se a torre desenhada ocupar toda a folha em altura, com que abertura ficarão os pés no desenho de Maria?
Resp.: 11.48 cm.

Exemplo –
Se dobrarmos ao meio, e ao longo do lado maior, uma folha de papel A4, obtemos duas folhas de tamanho A5; se dobrarmos ao meio, e ao longo de seu lado maior, uma folha A5, obtemos duas folhas A6; e assim por diante. *Todas essas folhas de papel têm a mesma forma, mas o tamanho é diferente.*



Neste caso, quanto vale o fator de redução? Sendo a e b a altura e largura da folha de papel (então a > b), as duas semifolhas derivadas têm altura b e largura a/2, que devem verificar a proporção

$\frac{a}{b} = \frac{b}{a/2}$, logo $\frac{a^2}{2} = b^2$, de modo que $a = b\sqrt{2}$, e daí $m = \sqrt{2}$.

No caso da folha A4, temos largura = b = 21 cm, de modo que a altura da A4 é a = 21 x sqrt{2} = 29,6985 cm.

Exercício -
Acima, demos as dimensões da folha A4 ($21\sqrt{2}$, 21 *). A partir disso, deduza as dimensões das folhas A3, A2, A1 e A0. Constate que a área da A0 vale aproximadamente 1 metro quadrado.*
(A rigor, vale $84 \times 84\sqrt{2} \simeq 9978\, cm^{2}$.)

Exemplo – (ORM 2013)
A Empresa X comercializou imagens do mascote da Copa/2014. Fizeram uma primeira imagem de 25 cm de altura que pesou 2 kg. O dono da empresa achou muito pesada e mandou fazer uma nova imagem com a metade da altura. Sendo que o material usado foi o mesmo, qual o peso da segunda imagem?
Resp.:
As imagens são figuras semelhantes, pois representam o mesmo mascote. Além disso, o peso de imagens semelhantes (e feitas do mesmo material) varia proporcionalmente com o cubo da altura. Logo, como a segunda imagem tem a metade da altura da primeira, seu peso será um oitavo desta. Resposta: a segunda imagem pesa 2/8 = 0,25 kg.

5).- Problemas de repartição proporcional ou de modelagem

Queremos achar uma sequência de números ($a_1, a_2, a_3, \cdots$) que, além de serem diretamente proporcionais aos números de uma outra sequência ($b_1, b_2, b_3, \cdots$) dada ou conhecida, verifiquem alguma propriedade especificada de antemão.

Exemplo – (partilha proporcional)
Deseja-se dividir um número dado A <u>em parcelas</u> $a_1, a_2, \cdots, a_n$ que sejam diretamente proporcionais a números dados $b_1, b_2, \cdots, b_n$.

Queremos ter: $A = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ e $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \cdots = \frac{a_n}{b_n} = m$. Ora, como cada $a_k = mb_k$, segue
que $A = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = mb_1 + mb_2 + \cdots + mb_n = m(b_1 + b_2 + \cdots + b_n)$, de modo que temos

$$\boxed{\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \cdots = \frac{a_n}{b_n} = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} = \frac{A}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} = m.}$$

Preste atenção

Consequentemente, os valores procurados são dados por $a_1 = mb_1$, $a_2 = mb_2$, etc.

Exemplo –
Neste mês, os gastos administrativos de um edifício foram de R$ 4000. Deseja-se calcular as respectivas cotas condominiais proporcionalmente à área de cada apartamento do edifício, no qual existem cinco apartamentos: dois com área de 80 m^2 , dois com 100 m^2 e um com 286 $m^{2.}$.
Resp.
A = 4000, os b's são as áreas, e indicando por c's as cotas, temos:

$$\frac{c_1}{80} = \frac{c_2}{80} = \frac{c_3}{100} = \frac{c_4}{100} = \frac{c_5}{286} = \frac{A}{80+80+100+100+286} = \frac{4000}{646} = 6{,}19195$$

Logo, os apartamentos de 80 m^2 pagarão uma cota de 6,19195 x 80 = 495,36, os aptos de 100 pagarão 6,19195 x 100 = 619,20 e o de 286 pagará 6,19195 x 286 = 1770,90.

Problema – (Regra da Sociedade)
Numa empresa de três sócios, estes investiram um capital b_1, b_2, b_3 , respectivamente. Como repartir proporcionalmente a seus investimentos o lucro L obtido?
Resp. Trata-se de um exemplo de partilha proporcional: A = L, os a_k são os lucros a determinar e os b_k são os investimentos feitos pelos sócios. Logo:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{b_1 + b_2 + b_3} = \frac{L}{b_1 + b_2 + b_3} = m.$$

de onde tiramos $a_1 = mb_1$, etc.

Exemplo -
Dividir 17 400 em partes <u>inversamente</u> proporcionais aos números 3, 5 e 9.
Temos de dividir 17 400 em partes <u>diretamente</u> proporcionais aos números 1/3, 1/5 e 1/9; e isso equivale a dividir esse número diretamente proporcionalmente aos números 15/45, 9/45 e 5/45, o que é o mesmo que dividí-lo em partes diretamente proporcionais aos números 15, 9 e 5 (por quê?). Esta última versão do problema já nos é conhecida, e sua resolução dá: 9000, 5400 e 3000.