7.

OS 2 TEOREMAS DE THALES

1).– Contexto de uso dos teoremas de Thales
2).– O Teorema de Thales dos Triângulos
3).– O Teorema de Thales do Paralelismo
4).– Casos particulares dos teoremas de Thales
5).– Exercícios e problemas

1).– Contexto de uso dos teoremas de Thales

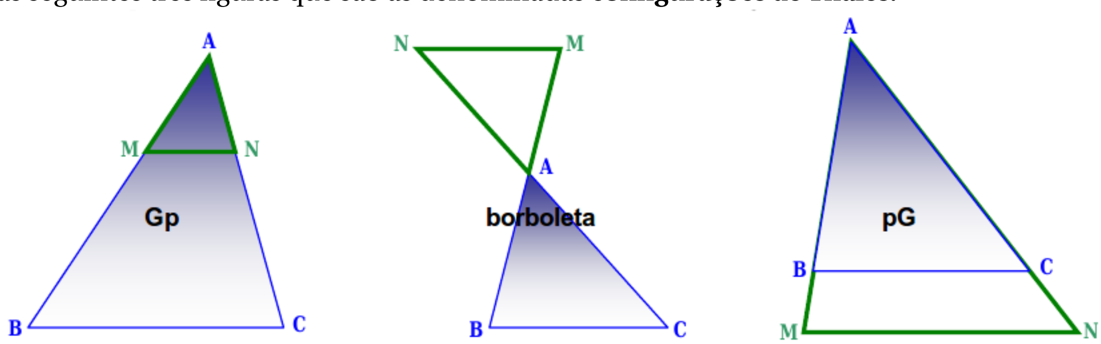
Para polígonos quaisquer, para que exista semelhança é necessário que sejam obedecidas duas condições:

a). ângulos iguais
b). lados proporcionais

Contudo, *no caso particular de triângulos* basta verificarmos uma dessas condições, e é isso que os teoremas de Thales exploram. Mais precisamente, os teoremas de Thales trabalham com a *proporcionalidade* entre os (comprimentos dos) lados de *triângulos semelhantes*. O conhecimento dessa proporcionalidade nos permite resolver dois tipos de problemas

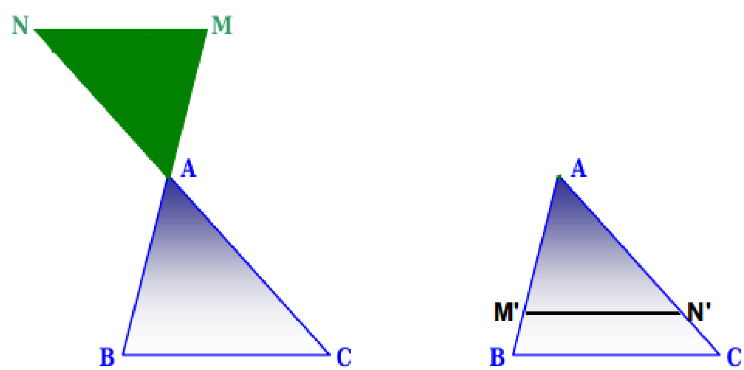
- *calcular comprimento de lados*
  (é o problema comumente visto na Escola; resolve-se com o Teorema de Thales dos Triângulos.)
- *decidir a existência, ou não, de paralelismo entre lados*
  (esse tipo de problema é resolvido usando o Teorema de Thales do Paralelismo.)

Fique alertado de que nem sempre os problemas que resolveremos por Thales se apresentam diretamente como problemas de triângulos, podendo ser preciso experiência e imaginação para sermos capazes de fazer aparecer os triângulos. Para isso, é essencial que saibamos fazer aparecer uma das seguintes três figuras que são as denominadas **configurações de Thales:**



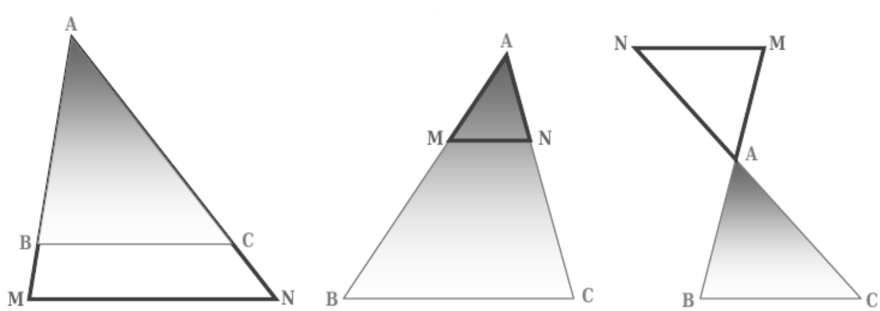
É crucial observar o paralelismo $MN//BC$! É ele que garantirá a existência da proporcionalidade entre os lados envolvidos. Menos importante é observar que devemos pensar no triângulo AMN como sendo o que contém um lado de comprimento desconhecido, de modo que a diferença entre a primeira e terceira configurações está no tamanho (**G**rande ou **p**equeno) do triângulo ABC relativamente ao AMN.

Em verdade, as configurações Gp e a pG são equivalentes: diferem apenas na notação; e a configuração borboleta pode ser facilmente reduzida a uma dessas duas, bastando fazer uma reflexão de centro A do triângulo AMN. Confira na figura a seguir a reflexão AMN → AMN', passando de uma configuração borboleta para uma Gp:



2).– O Teorema de Thales dos Triângulos

Em cada uma das três configurações de Thales (figuras abaixo nas quais temos $BC//MN$),



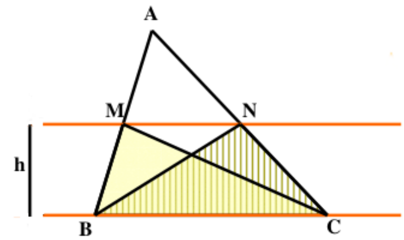
os triângulos ABC e AMN são semelhantes, de modo que vale a **proporção de Thales:**

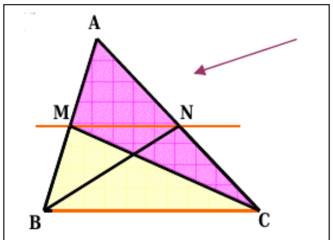
$$\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN} = \frac{BC}{MN}.$$

Prova.
Como facilitador do argumento, usemos a segunda configuração acima, a de tipo Gp. Como já observado, as outras duas configurações facilmente se reduzem a essa, por troca de notação ou uso de reflexão.

Observemos inicialmente que, na figura ao lado:

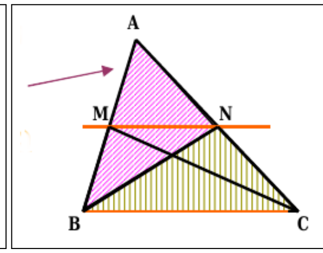
área (MBC) = área (NBC) = $\frac{BC \times h}{2}$.





Na figura da esquerda:
área (AMC) = área (ABC) - área (MBC) ,
e na figura da direita:
área (ANB) = área (ABC) - área (NBC) .
Consequentemente, pela observação inicial:

área (AMC) = área (ANB) .



Da figura abaixo, tiramos:

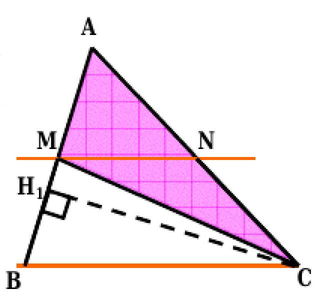
área (AMC) = $\frac{AM \times CH_1}{2}$

e

área (ABC) = $\frac{AB \times CH_1}{2}$,

de modo que:

$$\frac{\text{área}(AMC)}{\text{área}(ABC)} = \frac{AM}{AB}.$$



Da figura abaixo, tiramos:

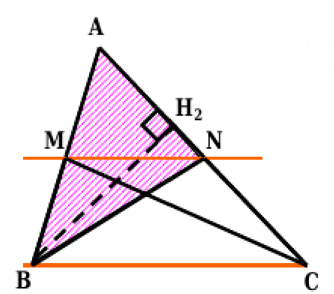
área (ANB) = $\frac{AN \times BH_2}{2}$

e

área (ABC) = $\frac{AC \times BH_2}{2}$,

de modo que:

$$\frac{\text{área}(ANB)}{\text{área}(ABC)} = \frac{AN}{AC}.$$



Visto que já mostramos que área (AMC) = área (ANB) , as igualdades de razões acima nos permitem concluir que

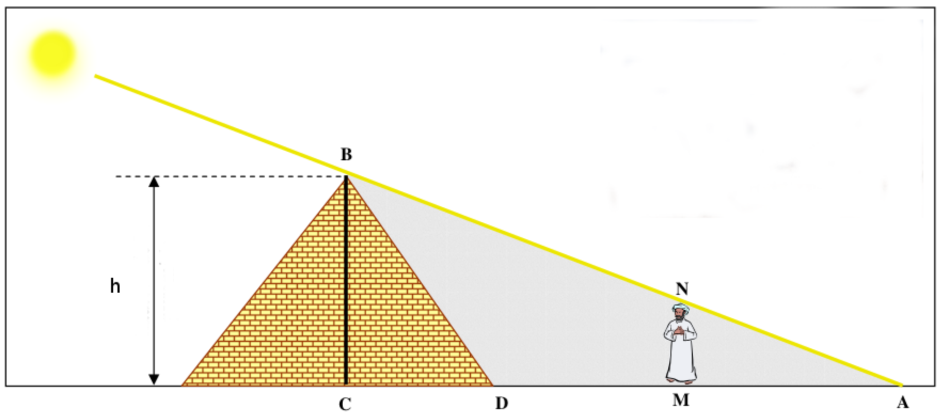
$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}.$$

De modo análogo se demonstra que

$$\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC}.$$

Exemplo

Existem lendas afirmando que Thales de Miletos c. 600 AC teria usado o teorema anterior para calcular a altura h da pirâmide de Khufu, a Grande Pirâmide do Egito. Para isso, num dia ensolarado, ele teria colocado um auxiliar de fronte à pirâmide e de modo tal que sua sombra AM ficasse superposta à sombra AD da pirâmide, conforme disposto na figura abaixo. (Observe que os triângulos ABC e AMN estão dispostos numa configuração de Thales Gp, pois $BC//MN$.)



Thales, então, mediu os seguintes comprimentos: $CD = 115$ m, $DM = 163,4$ m, $AM = 3,5$ m e $MN = 1,8$ m. A proporção de Thales lhe permitiu escrever:

$$\frac{AC}{AM} = \frac{AB}{AN} = \frac{BC}{MN} \quad \therefore \quad \frac{AC}{3.5} = \frac{AB}{AN} = \frac{h}{1,8}\,.$$

Ora, $AC = AM + MD + CD = 3,5 + 163,4 + 115 = 281,9$ m, de modo que

$$\frac{281,9}{3,5} = \frac{h}{1,8} \quad \therefore \quad h = \frac{1,8 \times 281,9}{3,5} = \frac{507,42}{3,5} = 145,0\,\mathrm{m}\,.$$

Duas maneiras de escrevermos a proporção de Thales

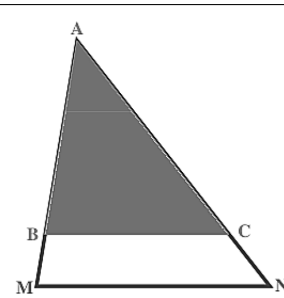
sempre estando verificado o paralelismo $BC//MN$, em qualquer configuração de Thales:

1). Versão triângulos semelhantes:

$$\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN} = \frac{BC}{MN}\,.$$

2). Versão feixe de paralelas:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BM}{CN} = \frac{AM}{AN}\,.$$



Observações

1).– A versão triângulos semelhantes é o que afirma o Teorema de Thales e deve ser interpretada como dizendo que, sendo α o valor comum das razões envolvidas na proporção de Thales, os lados do triângulo ABC valem α vezes os correspondentes lados do triângulo AMN, ou seja: $AB = \alpha AM$, $AC = \alpha AN$ e $BC = \alpha MN$.

2).– A versão feixe de paralelas é a enfatizada nas escolas brasileiras e interpreta o teorema como tratando da comparação dos segmentos sobre duas retas *secantes* em A e os quais são determinados pela intersecção das retas *paralelas* BC e MN. Ela é imediatamente generalizada para o caso de três ou mais retas paralelas.

Esta versão é consequência da proporção de Thales. Ou seja:

$$\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN} = \frac{BC}{MN} \quad \Rightarrow \quad \frac{AB}{AC} = \frac{BM}{CN} = \frac{AM}{AN}\cdot$$

Provemos. É imediato ver que de $AB/AM = AC/AN$ segue $AB/AC = AM/AN$. Resta mostrar que $AB/AC = BM/CN$. Para isso, observe que

$$\frac{BM}{AB} = \frac{AM - AB}{AB} = \frac{AM}{AB} - 1 = \frac{AN}{AC} - 1 = \frac{AN - AC}{AC} = \frac{CN}{AC} \quad \therefore \quad \frac{BM}{AB} = \frac{CN}{AC} \quad \therefore \quad \frac{AB}{AC} = \frac{BM}{CN}\cdot$$

3).– Ao contrário do que faz a Escola Básica, em problemas olímpicos se enfatiza a versão triângulos semelhantes. Também é importante observar que **não é verdade que**

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BM}{CN} = \frac{BC}{MN}\cdot$$

Já vimos que as duas primeiras dessas razões são iguais, contudo elas diferem da terceira. Provemos isso por absurdo. Se valesse $AB/AC = BC/MN$, a igualdade $AB/AM = BC/MN$ da proporção de Thales nos levaria a $AB/AC = AB/AM$, ou seja $AC = AM$, o que é absurdo.

4.– Dado o carácter internacional das provas de olimpíadas, bem como das listas de problemas e livros tratando de sua preparação, é importante observarmos que não há unanimidade sobre o que se entende por Teorema de Thales na literatura matemática.

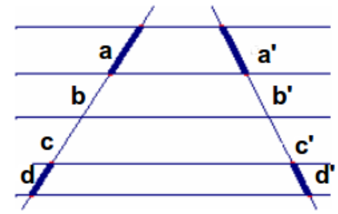
Antigamente, ele era chamado de Teorema dos Segmentos Proporcionais. Por influência de livros-texto franceses escritos no final do sec. XIX, os únicos que eram usados no Brasil até boa parte do sec. XX, tornou-se popular a denominação Teorema de Thales. Também se usa a denominação Teorema de Thales Direto.

Contudo, em muitos países, por Teorema de Thales entende-se o teorema que afirma que "*todo triângulo inscrito num semicírculo é retângulo*". Isso é o caso, por exemplo, dos atualmente influentes textos americanos que reservam a denominação Teorema Básico da Proporcionalidade para nosso Teorema de Thales dos Triângulos.

Para aumentar a confusão, em alguns países se entende por Teorema de Thales somente a versão feixe de paralelas, sendo que em alguns (exemplo, Brasil) se fala em várias paralelas cortando duas secantes, e em outros (exemplo, Alemanha) se fala em duas paralelas cortando um feixe de duas ou mais secantes. Nos exercícios a seguir se mostra que todos essas variantes são fáceis consequências de nosso Teorema de Thales dos Triângulos.

Exercício

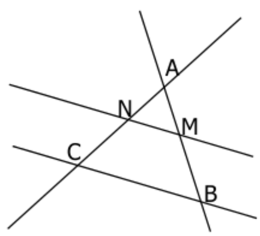
Mostre a veracidade da seguinte versão feixe de paralelas:



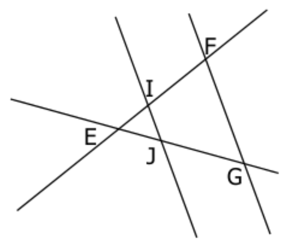
$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'}.$$

Exercícios de fixação

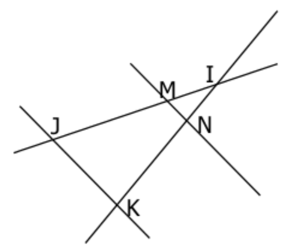
Para figura abaixo, identifique a configuração de Thales envolvida e verifique se a correspondente proporção está correta.



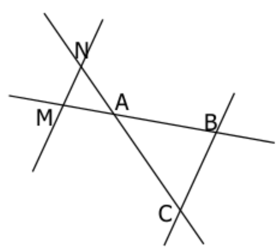
$$\frac{AN}{AC}=\frac{AM}{AB}=\frac{NM}{CB}$$



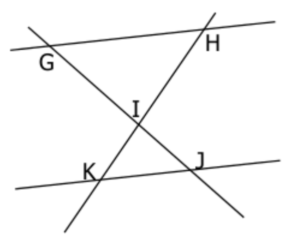
$$\frac{EI}{EF}=\frac{EJ}{EG}=\frac{IJ}{FG}$$



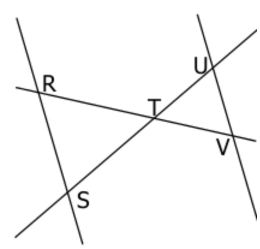
$$\frac{IM}{IJ}=\frac{IN}{IK}=\frac{MN}{JK}$$



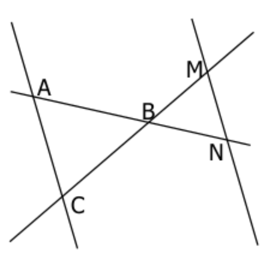
$$\frac{AN}{AC}=\frac{AM}{AB}=\frac{NM}{BC}$$



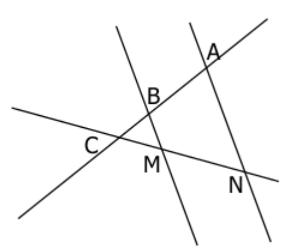
$$\frac{IG}{IJ}=\frac{IH}{IK}=\frac{GH}{KJ}$$



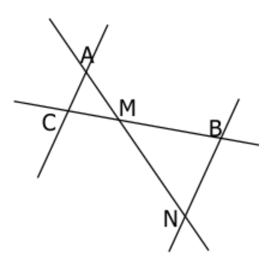
$$\frac{TR}{TV}=\frac{TS}{TU}=\frac{RS}{UV}$$



$$\frac{BA}{BN}=\frac{BC}{BM}=\frac{AC}{MN}$$



$$\frac{CB}{CA}=\frac{CM}{CN}=\frac{MB}{NA}$$

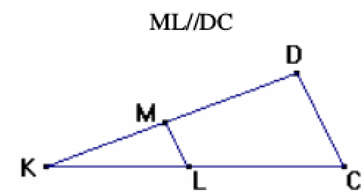


$$\frac{MA}{MN}=\frac{MC}{MB}=\frac{AC}{NB}$$

Exercício de cuidado – 1

*Relativamente à configuração de Thales da figura abaixo, pede-se apontar quais das seguintes igualdades **não** são verdadeiras:*

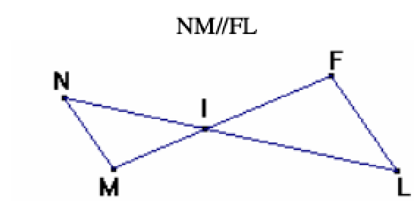
$$\frac{KM}{KD}=\frac{KL}{KC}=\frac{ML}{DC},\quad \frac{KM}{ML}=\frac{KD}{DC}$$
$$\frac{KM}{KL}=\frac{MD}{LC}=\frac{KD}{EC},\quad \frac{KM}{MD}=\frac{KL}{LC}.$$



Exercício de cuidado – 2

*Relativamente à configuração borboleta de Thales da figura abaixo, pede-se apontar quais das seguintes igualdades **não** são verdadeiras:*

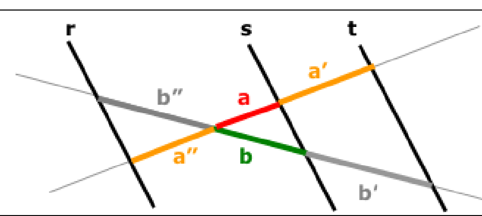
$$\frac{IN}{IL}=\frac{IM}{IF}=\frac{NM}{FL},\quad \frac{IM}{MN}=\frac{IF}{FL}$$
$$\frac{IN}{IM}=\frac{IL}{IF}=\frac{NL}{MF},\quad \frac{NI}{NL}=\frac{MI}{MF}.$$



Exercício

Relativamente à configuração borboleta de Thales da figura abaixo (feixe de retas r,s,t paralelas), pede-se mostrar a validade da seguinte proporção:

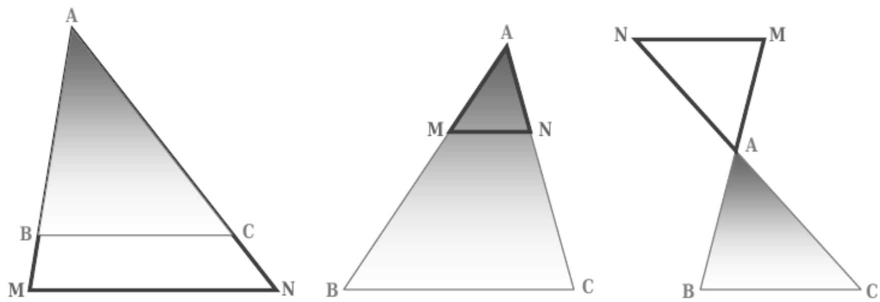
$$\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}=\frac{a''}{b''}.$$



3).– O Teorema de Thales do Paralelismo

É usado na decisão do paralelismo entre duas retas que cortam duas secantes.

Em configurações como as dadas abaixo,



- *se pudermos garantir que vale a proporção (note que, agora, são apenas duas razões envolvidas)*

$$\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN},$$

então também poderemos afirmar que existe o paralelismo $BC//MN$ e que os triângulos ABC e AMN são semelhantes.

- *se ocorrer a diferença*

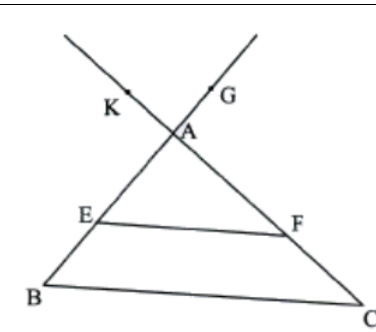
$$\frac{AB}{AM} \neq \frac{AC}{AN},$$

*então BC **não é** paralela a MN.*

Observação
Somente **duas** razões são usadas. Na prática, é necessário muito cuidado para atinarmos quais são essas duas razões envolvidas. Uma maneira de se evitar erros é pensar em termos de triângulos. Outras pessoas preferem observar que a ordem com que os pontos A, B, M estão alinhados é a mesma ordem de alinhamento dos pontos A, C, N. Confira isso nas figuras acima.

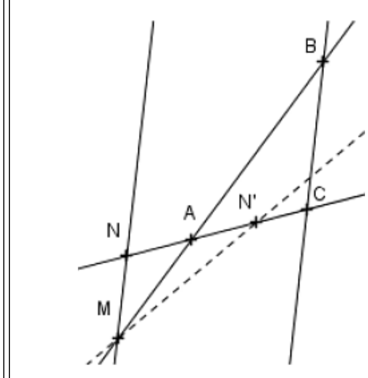
Exemplo

Na figura ao lado, pergunta-se: são paralelas as retas por KG e BC ? São dados os comprimentos: $AB = 5$, $AC = 6,5$, $AE = 3$, $AF = 4$, $AK = 2,6$ e $AG = 2$.
Solução.
Iniciemos observando que os pontos K, A, C estão alinhados na mesma ordem que os pontos G, A, B. Logo, devemos perguntar: $AK/AC = AG/AB$?
Ora, calculando vemos que $AK/AC = AG/AB = 2/5$, logo $KG//BC$.



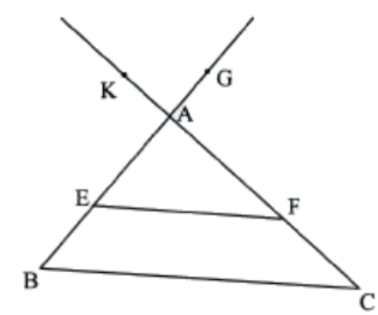
Cuidado!
Na figura ao lado, evidentemente as retas por BC e MN' não são paralelas. Contudo, vale a igualdade $AM/AB = AN'/AC = 1/3$. Como explica-se isso?

Solução.
Porque não podemos aplicar o Thales Recíproco já que as duas razões acima não estão associadas a um par de triângulos, conforme o teorema. Outro modo de ver consiste em observar que a ordem de alinhamento de M, A, B não é a mesma de N', A, C.



Exemplo

Na figura ao lado, pergunta-se: são paralelas as retas por EF e BC ? São dados os comprimentos: $AB = 5$, $AC = 6,5$, $AE = 3$, $AF = 4$, $AK = 2,6$ e $AG = 2$.
Solução.
Iniciemos observando que os pontos A, E, B estão alinhados na mesma ordem que os pontos A, F, C. Logo, devemos perguntar: $AE/AB = AF/AC$?
Ora, calculando vemos que $AE/AB = 3/5$, enquanto que $AF/AC = 4/6,5 = 40/65 = 8/13$. Logo $AE/AB \neq AF/AC$, de modo que não há paralelismo entre EF e BC.



Terminologia –
Nos livros, é mais comum vermos o Teorema de Thales do Paralelismo dividido em dois. A primeira parte desse teorema fica denominada como Teorema de Thales Recíproco, e a segunda parte como Teorema de Thales Contraposto.

Por outro lado, observe que o teorema podia ser enunciado mais simplesmente como uma condição necessária e suficiente para MN ser paralela à base BC. Do seguinte modo:

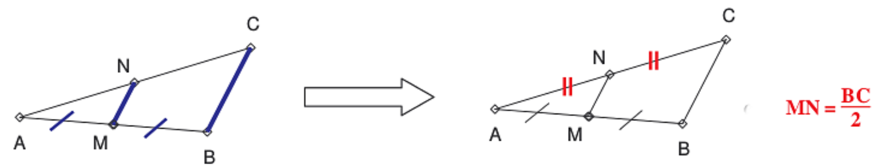
Em triângulos configurados como nas figuras acima, temos que

$$\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN} \iff BC//MN.$$

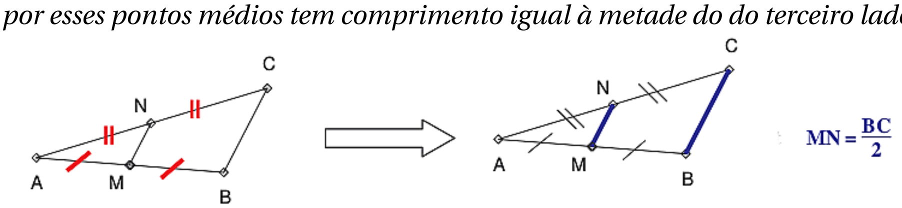
4).– Casos particulares importantes dos teoremas de Thales

Os teoremas a seguir são aplicações imediatas do Teorema de Thales dos Triângulos.

Teorema da Base Média
*Num triângulo ABC, **se** uma reta MN corta um lado AB em seu ponto médio M, e paralelamente a um segundo lado BC, **então** essa reta corta o terceiro lado em seu ponto médio N, e o segmento MN formado pelos dois pontos médios tem comprimento igual à metade do do terceiro lado: $MN = BC/2$. (O segmento MN é denominado base média relativamente à base BC.)*



Teorema dos Pontos Médios
*Num triângulo ABC, **se** uma reta MN passa pelo ponto médio M do lado AB, e passa pelo ponto médio N do lado AC, **então** essa reta MN é paralela ao terceiro lado BC do triângulo, e o segmento MN formado por esses pontos médios tem comprimento igual à metade do do terceiro lado: $MN = BC/2$.*



Exercício
Dois círculos, centrados em O e O' respectivamente, se cortam em dois pontos, A e B. Sejam um diâmetro AC por O e um diâmetro AD por O'. Pede-se mostrar que $CD//OO'$ e que $OO' = CD/2$.