1. APLICAÇÃO de RECEITAS x RESOLUÇÃO de PROBLEMAS

Exemplo 1
Achar todos os x reais para os quais vale $x^2+1>2x$.
a). todos os $x\in\mathbb{R}$ *b).* $x\geqslant 1$ *c).* $x>1$ *d).* $x\neq 1$ *e).* $x<1$
– Resolução de malandro.

Exemplo 2
Achar todos os x reais para os quais vale $x^2+1>2x$.
– Resolução de aplicador de receitas.
– Resolução de aluno olímpico identificando padrão.
– Resolução de aplicabilidade geral.

Exemplo 3
Estudar o que ocorre com os dígitos da representação decimal de 2^n*, quando* $n\geqslant 1$ *variar entre os números inteiros,*
– *Investigação 1. O que ocorre com o dígito da casa das unidades?*
É fácil vermos que, à medida que n toma sucessivos valores, esse dígito vai percorrendo a sequência $2\to4\to8\to6\to2\to4\to8\to6\to\cdots$. Em particular, os dígitos $0,1,3,5,7,9$ estão banidos desta casa.
– *Investigação 2. Os banidos também nunca ocorrem nas demais casas?*
Não, por exemplo, $n=29$ produz $2^{29}=536870912$, o qual contém todos os banidos.
– *Resuminho e constatação*
Para simplificar, concentremos no banido zero. Pelo visto acima, constata-se que

as potências 2^n *(para* $n=1,2,3,\ldots$*) dividem-se em*
as **comzero** *(são as que têm algum dígito zero) e as* **semzero** *(as que não têm nenhum dígito zero).*

Ora, à medida que n for crescendo também irá aumentando a quantidade de dígitos de 2^n, o que nos leva a conjecturar que será cada vez mais raro encontrarmos um 2^n semzero. Isso nos motiva uma próxima investigação.
– *Investigação 3. O que ocorre com a quantidade de semzeros à medida que* n *cresce?*
Iniciamos essa investigação com um experimento computacional, determinando todos os semzero para $n=1(1)100$. A tabela a seguir mostra todos os respectivos $(n,2^n)$.

(1, 2)	(16, 65536)	(36, 68719476736)
(2, 4)	(18, 262144)	(37, 137438953472)
(3, 8)	(19, 524288)	(39, 549755813888)
(4, 16)	(24, 16777216)	(49, 562949953421312)
(5, 32)	(25, 33554432)	(51, 2251799813685248)
(6, 64)	(27, 134217728)	(67, 147573952589676412928)
(7, 128)	(28, 268435456)	(72, 4722366482869645213696)
(8, 256)	(31, 2147483648)	(76, 75557863725914323419136)
(9, 512)	(32, 4294967296)	(77, 151115727451828646838272)
(13, 8192)	(33, 8589934592)	(81, 2417851639229258349412352)
(14, 16384)	(34, 17179869184)	(86, 77371252455336267181195264)
(15, 32768)	(35, 34359738368)	

A tabela mostra que é somente com $n=51$ que temos um aumento significativo da distância entre os 2^n's sem zero. A partir daí, o "pulo" parece sofrer um aumento. Essa observação nos leva a refazer a tabela, agora para $n=100(1)200$, mas esses novos cálculos não detectam nenhum novo semzero. O mesmo ocorre para $n=200(1)300$, $n=300(1)400$, e isso continua ocorrendo ao menos para $n\leqslant 5000$. Somos, assim, levados a fazer a seguinte conjectura:

Conjectura: *É finita a quantidade dos* 2^n *semzero, pois não existe nenhum deles com* $n>86$.

A evidência computacional acima, mesmo continuada para valores maiores que $n=5000$, não serve como resposta matemática (= absolutamente certa e definitiva) para essa conjectura. Além disso, como parece que ainda ninguém tenha conseguido decidir sua veracidade, temos aqui um exemplo de **conjectura aberta**.

A decisão de toda conjectura matemática será uma *decisão positiva* (se provarmos que a conjectura é verdadeira) ou uma *decisão negativa* (se provarmos que ela é falsa). Exemplificando com a conjectura acima: teremos uma decisão positiva se conseguirmos demonstrar que efetivamente não existe nenhum 2^n semzero com $n > 86$, e teremos uma decisão negativa se conseguirmos achar ao menos um $n > 86$, dando o respectivo 2^n semzero.

É muito importante entender
que uma estratégia computacional poderia ser usada para negativar a conjectura acima, mas jamais para obter uma decisão positiva. Em termos gerais, é *essencial* se entender que em problemas envolvendo infinitos casos, como o acima, uma abordagem estritamente computacional *não pode ser usada para positivar.* Detalhes na próxima lição.

Observe que em qualquer problema é válido usar a estratégia computacional como **heurística**, como um recurso para orientar nossa intuição sobre o problema. Foi o que fizemos acima.

Exemplos de conjecturas famosas
– Conjectura de Goldbach, uma conjectura aberta
Este matemático, lá por c. 1740 e ajudado por L. Euler, conjecturou: *Todo inteiro par* $\geqslant 4$ *pode ser escrito como a soma de dois números primos, possivelmente iguais.* Passado todo este tempo, esta conjectura continua aberta e isso não foi por falta de interesse. Com efeito, mais do que simples curiosidade, ela se mostrou estar relacionada com muitos problemas. Computacionalmente, já foi verificada ser verdadeira ao menos até $4 \cdot 10^{17}$. É intuitivamente plausível que essa conjectura seja verdadeira, pois à medida que tomamos inteiros cada vez maiores torna-se mais fácil expressá-los como a soma de dois inteiros; a dificuldade está em achar dois primos fazendo isso.
– Conjectura dos números de Fermat, uma conjectura falsa
Pierre Fermat, lá por 1640, conjecturou que todos os números inteiros da forma $P(n) = 1 + 2^{2^n}$, são primos.
Sua motivação era encontrar primos grandes e com muito trabalho, pois seus cálculos eram feitos à mão, mostrou que a conjectura valia para $n = 0, 1, 2, 3, 4$. Contudo, 100 anos depois, L. Euler decidiu negativamente a conjectura, mostrando que $P(5) = 1 + 2^{32} = 4\,294\,967\,297$ não é primo, pois pode ser fatorado: $P(5) = 641 \times 6\,700\,417$.
– Conjectura de Fermat, uma conjectura decidida como verdadeira
Fermat, e ainda lá por 1640, estudando as equações $x + y = z, x^2 + y^2 = z^2, x^3 + y^3 = z^3, x^4 + y^4 = z^4$, onde as incógnitas x, y, z podem tomar apenas valores inteiros positivos, notou que embora as duas primeiras equações tenham infinitas soluções a terceira e quarta não têm nenhuma. Com isso, ele conjecturou que

não existem soluções todas inteiras e positivas para $x^n + y^n = z^n$*, se* $n \geqslant 3$.

Mesmo após os esforços de muitos dos maiores matemáticos de todos os tempos, foi somente em 1995 que se conseguiu decidir definitivamente essa conjectura, provando-se que é verdadeira; por isso hoje devemos denominá-la Teorema de Fermat. A parte principal da demonstração foi dada por Andrew Wiles. Os 350 anos decorridos entre Fermat e Wiles, e as mais de mil páginas que ocupam sua demonstração servem para mostrar o quão grande pode ser a distância entre a descoberta de um resultado (= formulação de sua conjectura) e a respectiva demonstração.

Curiosidades.
Wiles anunciou uma demonstração da conjectura em 1993, mas especialistas detectaram um erro. Com a ajuda de seu colega Richard Taylor, Wiles conseguiu corrigir o erro em 1995.
Como reconhecimento à importância de seu trabalho, A. Wiles recebeu inúmeros prêmios importantes, o último sendo o Prêmio Abel de 2016. Contudo, não pode receber o maior prêmio matemático, a Medalha Fields, pois quando decidiu a Conjectura de Fermat já tinha mais de 40 anos, idade limite para se ganhar essa medalha.

Toda conjectura que tenha sido demonstrado ser verdadeira pode ser dita ter passado ao status de *teorema.* A propósito, é prática se reservar a palavra teorema para resultados importantes e de natureza geral, preferivelmente que sejam aplicáveis em outros problemas.

Dicionário

Heurística: trabalho empírico/computacional que objetiva sugerir ou conjecturar um resultado ou um caminho de demonstração, positiva ou negativa.

Conjectura: afirmação que fazemos, embasada em alguma evidência experimental (cálculos, desenhos, etc.) ou em nossa intuição, mas da qual ainda não temos a decisão de sua veracidade. Dois tipos: conjectura fechada (já foi decidida) e conjectura aberta (= ainda não decidida).

Intuição: conhecimento que é mais sentido do que raciocinado. Pode ser aprimorada com estudo e experiência bem orientada. O problema com a intuição é que ela pode também nos levar a erros. Por isso sempre precisamos de demonstrações lógicas (dedutivas).

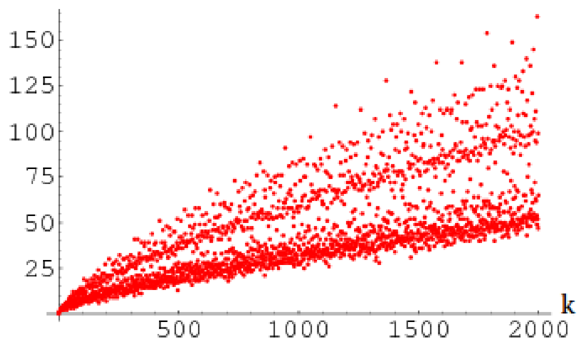
Teorema: toda afirmação matemática cuja veracidade já foi demonstrada. Isso é o caso das conjecturas que já se conseguiu demonstrar que são verdadeiras.
Na prática, é frequente se usar toda uma hierarquia de denominações em ordem de decrescente importância para as afirmações verdadeiras: teorema, proposição, corolário, lema, etc.

Exercícios para aula e casa

Exercício 1
Provar que tanto $x+y=z$ *como* $x^2+y^2=z^2$ *têm infinitas soluções todas inteiras e positivas.*
Dica: achando uma solução, use-a para fabricar infinitas outras.

Exercício 2
Determinar a quantidade de raízes reais da equação $(3+x)10^{-x/2}=3$.

Exercício 3
No Cometa de Goldbach (= figura abaixo), o eixo das ordenadas expressa a quantidade de maneiras de escrever cada inteiro par e da forma $n=2k$, *com* $2\leqslant k\leqslant 2000$ *(eixo das abscissas), como soma de dois primos (não interessando a ordem das parcelas). Antes de mais nada e apesar das aparências, explique por que este gráfico representa uma função. A seguir, explique por que ele aumenta a intuição favorável à veracidade da Conjectura de Goldbach.*



Exercício 4

a). *Observando as identidades algébricas* $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$, $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$, *induza (= conjecture) o que seria a versão* a^n-b^n *(para qualquer inteiro* $n\geqslant 2$*). Decida.*

b). *Existe correspondente versão para* a^n+b^n*? Dica: observe* $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$.

c). *Resuma seus resultados nos importantes casos em que* $b=1$.

Exercício 5

a). *Mostre que nem* 6^3+1 *e nem* $2^{12}+1$ *são números primos.*

b). *Prove: se* n *for inteiro positivo divisível por um inteiro* ***ímpar*** $\geqslant 3$, *então* 2^n+1 *não é primo.*

c). *Conclua que se* 2^n+1 *for primo, então* n *é uma* ***potência de 2***.

d). *Qual a relação entre o item anterior e os números de Fermat. Seja detalhado.*

e). *Resuma seus resultados.*