5. INDUÇÃO MATEMÁTICA

O objetivo desta lição
é estudar e exemplificar um dos tipos básicos de demonstração matemática, *a indução matemática* ou *demonstração iterativa*. Trata-se de um tipo de demonstração que se aplica tão somente ao caso de sequências infinitas de afirmações. Foi concebido principalmente por Blaise Pascal, lá por c. 1660 quando estudou as relações entre os coeficientes binomiais, e mais difundido a partir dos trabalhos de Giusepe Peano c. 1880.

1). A ideia do método da indução matemática

Objetivo e notação
dada uma sequência infinita de afirmações matemáticas, objetiva-se demonstrar a veracidade de cada uma delas. Usando uma notação geral, podemos denotar uma tal sequência com vários tipos de indexação, por exemplo:
$\mathscr{A}_0, \mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n, \ldots$, ou
$\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \mathscr{A}_3, \ldots, \mathscr{A}_n, \ldots$, ou
$\mathscr{A}_2, \mathscr{A}_3, \mathscr{A}_4, \ldots, \mathscr{A}_n, \ldots$, ou etc.
a indexação variará conforme o contexto do problema a resolver e sempre devemos ter o cuidado de observar quem é o primeiro valor do índice da sequência.

Alguns exemplos de tais sequências
$(1+r)^n \geqslant 1+nr$, para $n = 0,1,2,3,$ etc.
O número 3 divide $n^3 - n$, para $n = 1,2,3,\ldots$
$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, para $n \geqslant 1$ inteiro.
Sendo $A_n = \begin{bmatrix} \cos(n\varphi) & -\operatorname{sen}(n\varphi) \\ \operatorname{sen}(n\varphi) & \cos(n\varphi) \end{bmatrix}$, então $A_n = (A_1)^n$, para todos os $n \geqslant 1$ inteiros.

2). Indução matemática versus indução empírica

Indução matemática
demonstra a veracidade de todos os infinitos casos da sequência de afirmações envolvida no problema. É um método de demonstração absolutamente válido em Matemática.
Indução empírica
uma vez tendo verificado a veracidade de uma quantidade finita de casos da sequência, conclui afirmando que a veracidade vale em todos os casos. É um método de demonstração *inaceitável* em Matemática, sendo característico das denominadas ciências empíricas, como Física, Química, etc.

3). A estratégia do método da indução matemática

Blaise Pascal concebeu a seguinte estratégia para conseguir demonstrar a veracidade de todos os infinitos casos de uma sequência de afirmações matemáticas:

demonstrar que (a veracidade de cada caso) *é consequência da* (veracidade do caso anterior ou de casos anteriores).

Costuma-se usar como analogia o processo da derrubada de uma fileira de dominós. Se eles estiverem arrumados convenientemente, a queda do primeiro provoca a do segundo, e a deste a queda do terceiro e assim por diante. Entre outras coisas, esta analogia serve para enfatizar que além de os dominós estarem convenientemente dispostos, é preciso iniciar o processo com a derrubada do primeiro dominó, daí em diante eles caem sozinhos, pela ação de seus anteriores. Consequentemente, vemos que *toda demonstração por indução matemática terá duas etapas:*

- etapa da inicialização
- etapa indutiva ou da engrenagem

Passaremos a mostrar os detalhes a seguir.

4). Indução matemática simples

Nesta versão de indução, demonstramos que a veracidade de um caso qualquer da sequência de afirmações é suficiente para implicar a veracidade do próximo caso.
Supondo que a sequência de afirmações a demonstrar esteja indexada como $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \mathscr{A}_3, \dots, \mathscr{A}_n, \dots$, o esquema da sua demonstração por indução simples tem como duas etapas:

- *inicialização:* provo a veracidade de $\mathscr{A}_1$
- *engrenagem:* provo que a veracidade de $\mathscr{A}_n$ implica na de $\mathscr{A}_{n+1}$, e isso para cada $n \geqslant 1$.

Note que a inicialização seria com $\mathscr{A}_0$ se a sequência iniciasse com esta afirmação, seria com $\mathscr{A}_2$ se ela iniciasse com $\mathscr{A}_2$, e assim por diante para outras possibilidades de primeira afirmação. Analogamente, a etapa da engrenagem dessas variantes precisa cobrir todos os $n \geqslant 0$, $n \geqslant 2$, etc., respectivamente.

Exemplo modelo de indução simples
O número 3 *divide* $n^3 - n$, *para* $n = 1, 2, 3, \dots$.

- *inicialização:* é imediato que 3 divide $3^3 - 3 = 27 - 3 = 24$.
- *engrenagem:* supondo 3 divida $n^3 - n$, provo que também dividirá $(n+1)^3 - (n+1)$, e isso para cada $n \geqslant 1$. Ora, $(n+1)^3 - (n+1) = (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) - (n+1) = n^3 + 3n^2 + 2n = (n^3 - n) + 3n^2 + 3n = (n^3 - n) + 3(n^2 + n)$, e podemos concluir pois aí temos duas parcelas ambas divisíveis por 3.

Exemplo
Sendo $a_0 = 2$ *e* $a_{n+1} = \sqrt{-1 + 2\,a_n}$, *demonstrar que* $a_n \geqslant 1$ (*para todos os* $n \geqslant 0$).
Neste exemplo, as afirmações são: $\mathscr{A}_n = (a_n \geqslant 1)$, e o índice n varia entre os inteiros $\geqslant 0$.

- *inicialização:* é imediato que $a_0 = 2 \geqslant 1$.
- *engrenagem:* supondo valha $a_n \geqslant 1$, provo que também valerá $a_{n+1} \geqslant 1$, e isso para cada $n \geqslant 0$. Ora, sendo $a_n \geqslant 1$, então $2a_n \geqslant 2$ e daí $-1 + 2a_n \geqslant 1$, logo $a_{n+1} = \sqrt{-1 + 2a_n} \geqslant \sqrt{1} = 1$.

Note que essa demonstração vale para qualquer semente inicial $a_0 = \lambda$, desde que $\lambda \geqslant 1$.

Exemplo
Sendo $A_n = \begin{bmatrix} \cos(n\varphi) & -\operatorname{sen}(n\varphi) \\ \operatorname{sen}(n\varphi) & \cos(n\varphi) \end{bmatrix}$, *provar que* $A_n = (A_1)^n$, *para todos os* $n \geqslant 1$ *inteiros.*
Se definirmos $A = A_1$, o problema pede provar que $A^n = A_n$, para todos os $n \geqslant 1$.

- *Inicialização:* é imediata pois $(A_1)^1 = A_1 = A$.
- *engrenagem:* para $n \geqslant 1$, valendo que $A^n = A_n$, temos $A^{n+1} = A \cdot A^n = A \cdot A_n$, e então:

$$
\begin{aligned}
A^{n+1} &= \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\operatorname{sen}(\varphi) \\ \operatorname{sen}(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(n\varphi) & -\operatorname{sen}(n\varphi) \\ \operatorname{sen}(n\varphi) & \cos(n\varphi) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos(\varphi)\cos(n\varphi) - \operatorname{sen}(\varphi)\operatorname{sen}(n\varphi) & -\cos(\varphi)\operatorname{sen}(n\varphi) - \operatorname{sen}(\varphi)\cos(n\varphi) \\ \cos(\varphi)\operatorname{sen}(n\varphi) + \operatorname{sen}(\varphi)\cos(\varphi) & \cos(\varphi)\cos(n\varphi) - \operatorname{sen}(\varphi)\operatorname{sen}(n\varphi) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos((n+1)\varphi) & -\operatorname{sen}((n+1)\varphi) \\ \operatorname{sen}((n+1)\varphi) & \cos((n+1)\varphi) \end{bmatrix} = A_{n+1},
\end{aligned}
$$

  onde na ultima passagem, fazendo $a = \varphi$ e $b = n\varphi$, usamos as leis trigonométricas: $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$, e $\operatorname{sen}(a+b) = \cos a \operatorname{sen} b + \cos b \operatorname{sen} a$.

5). Indução matemática composta e outras variantes da indução simples

– Indução composta:

demonstramos que a veracidade de cada caso da sequência de afirmações é consequência da veracidade de *todos* os casos que lhe antecedem.
Assim, nos casos em que temos uma sequência de afirmações indexada como $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \mathscr{A}_3, \dots, \mathscr{A}_n, \dots$, sua demonstração por indução composta tem como duas etapas:

- *inicialização:* provo a veracidade de $\mathscr{A}_1$
- *engrenagem:* provo que a veracidade de $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \mathscr{A}_3, \dots, \mathscr{A}_n$ implica na de $\mathscr{A}_{n+1}$, e isso para cada $n \geqslant 1$.

Exemplo modelo de indução composta

Todo número inteiro, maior ou igual a 2, pode ser fatorado usando somente números primos.

- *inicialização:* é imediata, pois 2 é primo (aqui, temos uma fatoração trivial: um só fator).
- *engrenagem:* supondo $2, 3, 4, \ldots, , n$ possam ser fatorados usando somente primos, provo que o mesmo tem de acontecer com $n+1$. Ora, se $n+1$ for primo nada resta provar, e se ele *não* for primo, pela definição de número primo, ele pode ser escrito como $n+1 = a \cdot b$, onde nenhum desses dois fatores é igual à unidade e nem a $n+1$; logo $1 < a, b < n+1$, ou seja: $2 \leqslant a, b \leqslant n$. Isso implica, pela nossa suposição inicial, que tanto a como b podem ser fatorados usando somente primos, logo seu produto, ou seja $n+1$, também pode ser escrito como o produto de primos.

– Outras variantes da indução simples

Inúmeras variantes podem ser encontradas na resolução de problemas. Todas elas se caracterizam por ter uma etapa inicial (que pode envolver demonstrar dois ou mais casos) e uma etapa de engrenagem baseada na suposição da veracidade de um ou mais casos anteriores ao caso a ser demonstrado.

Vejamos uma possibilidade aplicada a uma sequência indexada como $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \mathscr{A}_3, \ldots, \mathscr{A}_n, \ldots$:

- *inicialização:* provo a veracidade de $\mathscr{A}_1$ e de $\mathscr{A}_2$
- *engrenagem:* provo que a veracidade de $\mathscr{A}_{n-1}$ e de $\mathscr{A}_n$ implica na de $\mathscr{A}_{n+1}$, e isso para cada $n \geqslant 2$ (note que *não é* $n \geqslant 1$).

Em todas essas variantes, é fácil sermos iludidos pela indexação. Por isso é recomendado muito cuidado e desenrolar mentalmente a engrenagem para ficarmos seguros que realmente todos os casos ficaram demonstrados. Por exemplo, na versão acima temos:
$\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2 \to \mathscr{A}_3, \quad \mathscr{A}_2, \mathscr{A}_3 \to \mathscr{A}_4, \quad \mathscr{A}_3, \mathscr{A}_4 \to \mathscr{A}_5,$ etc.

Exemplo

Sendo $F_1, F_2, F_3,$ etc. a sequência de Fibonacci e sendo $\phi = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$, mostrar que $F_n \leqslant \phi^{n-1}$ (se $n \geqslant 1$).

Recordemos que os números F_n de Fibonacci são definidos pela recursão $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ a partir das sementes $F_1 = F_2 = 1$. Como a recursão tem duas memórias, teremos de usar um raciocínio de indução do tipo acima, ou seja: $F_1, F_2 \to F_3,\ F_2, F_3 \to F_4,\ F_3, F_4 \to F_5$, etc.

As sementes verificam a desigualdade afirmada no enunciado, pois $F_1 = 1 \leqslant \phi^0$ e $F_1 = 1 \leqslant \phi^1 \simeq 1.62$. Passemos a descobrir a engrenagem envolvida.

O primeiro passo seria: $F_3 = F_2 + F_1 \leqslant \phi + 1 \leqslant \phi^2$? Ora, um cálculo direto mostra que $1+\phi = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = \phi^2$, ou seja $\phi + 1 = \phi^2$. Consequentemente, a pergunta acima tem como resposta: $F_3 = F_2 + F_1 \leqslant \phi + 1 = \phi^2$, o que dá efetivamente $F_3 \leqslant \phi^2$ (note que $F_2 \leqslant \phi$ força $F_3 \leqslant \phi^2$, apesar da igualdade $\phi + 1 = \phi^2$).

Passemos ao segundo passo da engrenagem: $F_4 = F_3 + F_2 \leqslant \phi^2 + \phi \leqslant \phi^3$? Sim, é só observar que $\phi^2 + \phi = \phi(\phi+1) = \phi\phi^2 = \phi^3$. Agora, está claro como funciona o processo de engrenagem nesta indução e então podemos passar à redação formal da demonstração.

- *inicialização:* provo a veracidade de $\mathscr{A}_1$
- *engrenagem:*

✦ Problemas de revisão ✦

Problema

Mostre que o valor da soma $(2+\sqrt{2})^n + (2-\sqrt{2})^n$ sempre é um número inteiro, qualquer que seja $n \geqslant 1$ inteiro.

Sugestão: calculando os primeiros valores da soma, ficará fácil conjecturar que $(2 \pm \sqrt{2})^n = a_n \pm b_n \cdot \sqrt{2}$ para constantes adequadas. A seguir, prove essa conjectura via indução matemática simples.

Problema

Generalizar, e provar por indução, o padrão associado às desigualdades:
$(1+a)(1+b) \leqslant 2(1+ab), \quad (1+a)(1+b)(1+c) \leqslant 4(1+abc), \quad (1+a)(1+b)(1+c)(1+d) \leqslant 8(1+abcd),$
onde $0 \leqslant a, b, c, \ldots \leqslant 1$.

Problema

Um grupo de amigos pretende transmitir via celular a mensagem "José passou no vestibular". Cada amigo tem probabilidade de 10% de enviar adiante o contrário da msg que recebeu (passou $\to$ não passou, não passou $\to$ passou). Supondo que quem inicia as transmissões mande mensagem correta, qual a probabilidade $p(n)$ de ser enviada msg correta no n-ésimo envio? Qual o valor dessa probabilidade a longo prazo (ou seja: para n muito grande)?