6. RESOLUÇÃO RECURSIVA DE PROBLEMAS

O objetivo desta lição
é ver como a ideia de recursão nos permite resolver simplesmente alguns tipos de problemas matemáticos.

1).– O uso de recursões na resolução de problemas matemáticos

dado um problema grande ou complexo, procuramos associá-lo a uma versão menor, e então fazer o mesmo com esta menor, e assim por diante até se chegar a uma versão viável de resolver facilmente. Resolvida esta, é só questão de voltarmos ao problema original.

Exemplo modelo
Seja o problema do cálculo da fatorial de um inteiro positivo, por exemplo a fatorial $49!$ do número 49. A abordagem recursiva, em vez de encarar $49!$ como $49! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times 49$, usa que $49! = 49 \times 48!$, e que $48! = 48 \times 47!$, e que $47! = 46! \times 47$, e que $46! = 45! \times 46$, etc. Consequentemente, se soubermos, por exemplo, o valor de $45!$ (poderia ser obtido de uma tabela dando fatoriais de 5 em 5) bastaria calcular apenas $49! = 45! \times 46 \times 47 \times 48 \times 49$.

2).– Comparação entre resolução iterativa e recursiva

Revise o que foi dito sobre isso na Lição 4. Seria proveitoso comparar a *maneira iterativa* de derrubarmos dominós enfileirados (provo que posso derrubar o primeiro, o segundo, o terceiro, etc. até o último) e a *maneira recursiva* (mostro que posso derrubar o primeiro e que a derubada de qualquer um dos outros fica reduzida à derrubada de seu anterior).

3).– Quando o problema é enunciado recursivamente

Em tais casos, a primeira coisa é escrever a recursão envolvida, a menos que o enunciado do problema já faça isso. A seguir, o que é pedido no problema poderá ser obtido com o mero desenrolar da recursão ou, o que será bem mais difícil, com a determinação de uma fórmula iterativa para ela.

Na Lição 4, já vimos problemas onde já se partia da recursão, aqui procuraremos enfatizar problemas onde precisaremos iniciar a resolução traduzindo recursivamente o enunciado.

Exemplo
Conta a lenda que, a pedido de um entediado príncipe indiano, o matemático Sessa ibn Daher *inventou o jogo de xadrês. O príncipe ficou tão alegre com o presente que prometeu oferecer ao matemático qualquer coisa que desejasse. Este, então, pediu um grão de trigo para a primeira casa do tabuleiro, duas para a segunda casa, quatro para a terceira, e assim por diante, sempre dobrando a quantidade até chegar na última casa do tabuleiro, a sexagésima quarta. Pede-se o número total de grãos que pediu.*
Denotando por g_n o número de grãos de trigo associado à n-ésima casa, é imediato escrevermos a recursão: $g_{n+1} = 2g_n$, sendo que $g_1 = 1$. Desenrolando, também é imediato obtermos a fórmula iterativa $g_n = 2^{n-1}$, para todos os $n \geqslant 1$. O problema pede $g_1 + g_2 + g_3 + \ldots + g_{64} = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{63}$. Ora, temos aqui uma PG de razão 2 e de primeiro termo 1, de modo que a soma pedida vale:

$$g_1 + g_2 + g_3 + \ldots + g_{64} = \frac{2^{64} - 1}{2 - 1} = 2^{64} - 1 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615 \text{ grãos.}$$

Exemplo (Problema dos Coelhos de Fionacci)
O matemático Leonardo de Pisa, mais conhecido como Fibonacci, em seu livro Liber abbaci, *escrito c. 1200 dC, divulgou a muito famosa* sequência de Fibonacci *como parte do seguinte problema que passamos a enunciar em suas próprias palavras: "Um homem tem um casal de coelhos num cercado totalmente fechado. Desejamos saber quantos casais podemos ter em um ano a partir deles, se a natureza de todos esses coelhos faz com que, a partir do segundo mês de idade, deem cria mensalmente a um outro casal."*
Fibonacci não diz, mas supõe que o casal inicial já é adulto e então já se reproduz no final do primeiro mês. Denotemos por f_n o número de casais no *final* do n-ésimo mês e atente cuidadosamente para a notação que se segue (corresponde ao que Fibonacci escreveu mas *não* é a notação usada na literatura moderna).

É imediato vermos que $f_1 = 2$, $f_2 = 3$, $f_3 = 5$, contudo daqui para frente só ficará fácil continuar se atinarmos que podíamos ter escrito $f_3 = 5 = 3+2 = f_2 + f_1$, e que $f_4 = 8 = 5+3 = f_3 + f_2$, e em geral (se $n \geqslant 3$): o número de casais no final do n-ésimo mês é igual ao número de casais no fim do mês anterior somado com o número de casais que nasceram neste último mês; este último número é igual ao número dos casais no penúltimo mês, pois passados dois meses todos esses podem se reproduzir. Consequentemente: $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, para cada $n \geqslant 3$. A quantidade de casais pedida no problema é f_{12}, cujo valor Fibonacci obteve desenrolando a recursão, o que deu $f_{12} = 377$. Confira.

Exercício
Modernamente, a sequência envolvida no Problema dos Coelhos de Fibonacci costuma ser escrita com outra notação. Em verdade, com duas notações que variam de autor para outro, o que nos força a ter bastante cuidado ao lermos sobre o assunto:

- $F_1 = F_2 = 1$ *e* $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, *para* $n \geqslant 3$
- $F_0 = F_1 = 1$ *e* $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, *para* $n \geqslant 2$.

Pede-se relacionar essas notações com a de Fibonacci. Atente para as respectivas sementes.

Observação:
o que na literatura se costuma encontrar como Problema dos Coelhos de Fibonacci são apenas variantes formuladas de modo a nos levar a determinar uma das duas recursões modernas acima. Nos livros da Escola, também é comum encontrarmos versões que não descrevem explicitamente todas as condições do problema.

Exemplo
Ao cair no chão, uma superbola rebota subindo $3/4$ *da altura de queda, e continua caindo e subindo sempre nessa proporção. Qual o comprimento da trajetória que realizará ao ser lançada de* 16 *metros de altura?*

4).– Quando o problema não for enunciado recursivamente

Nesses casos, mesmo que consigamos reformular o problema recursivamente, pode ocorrer de sermos incapazes de usar ou resolver a recursão. Somente a experiência poderá nos acenar com a possibilidade de êxito de uma estratégia recursiva para resolver um dado problema.

Exemplo modelo
Sendo a *e* b *variáveis reais, mostre que* $a-b$ *divide* $a^{128} - b^{128}$.
Usando a identidade algébrica $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y$, temos $a^{128} - b^{128} = (a^{64} - b^{64})(a^{64} + b^{64})$. Ora, isso mostra que podemos repetir com 64 o mesmo que fizemos com 128, e assim por diante: $128 \to 64 \to 32 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$, o que nos dá em notação simplificada:
$a^{128} - b^{128} = (a^{64} - b^{64}) \cdot A = (a^{32} - b^{32}) \cdot B = (a^{16} - b^{16}) \cdot C = (a^8 - b^8) \cdot C = (a^4 - b^4) \cdot D = (a^2 - b^2) \cdot E = (a^1 - b^1) \cdot F$, para fatores $A, B, C, \dots, F$ que não interessa explicitar. Resumindo: $a^{128} - b^{128} = (a-b) \cdot F$, de modo que está provada a divisibilidade.

Exercício
Resolva o problema anterior iterativamente. Para isso, use as seguintes sugestões:
$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
$a^3 - b^3 = a^3 - a^2b + a^2b - b^3 = a^2(a-b) + b(a^2 - b^2)$
$a^4 - b^4 = a^4 - a^3b + a^3b - b^4 = a^3(a-b) + b(a^3 - b^3)$.
etc., etc.

Exemplo (Problema das Torres de Hanoi)
O matemático francês Édouard Lucas, em seu livro Récréations mathématiques, *publicado c. 1890, inventou este problema e o apresentou sob a forma da lenda que segue.*
"O Prof. Claus de Siam, ao visitar o templo de Benares em Hanoi/Vietnam, sob a cúpula que marca o centro do Mundo viu três varetas de diamante fincadas no chão, todas com um côvado de altura e grossas como um corpo de abelha. No início dos séculos, o deus Brahma enfiou numa dessas varetas 64 discos de ouro, diferentes em tamanho e dispostos do chão para cima em ordem de diâmetros decrescentes. As outras varetas ficaram sem disco. Brahma também criou esse templo e nele colocou monges aos quais deu a tarefa de noite e dia transportar todos os 64 discos para a terceira vareta, e isso de acordo com regras que indicaremos a seguir. Quando os monges terminarem a tarefa, ocorrerá o fim do Mundo. As regras impostas por Brahma: pode-se transportar apenas um disco de cada vez, esse pode ir para qualquer uma das três varetas, mas nunca pode ser colocado por cima de um disco menor".
Pede-se o tempo para os monges terminarem sua tarefa à razão de um disco transportado por segundo.
Mostraremos que é suficiente fazermos $2^{64}-1 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615$ movimentos para realizar a tarefa; com um pouco mais de trabalho se mostra que é impossível realizá-la com um número menor de movimentos. Como os monges podem fazer $86\,400$ transportes por dia, precisarão cerca de $214\,000$ bilhões de dias para terminar a tarefa, ou seja cerca de 585 bilhões de anos.

Vamos resolver recursivamente esse problema descobrindo como reduzir a resolução do problema versão $n+1$ discos à versão n discos. Para isso, observe que em cima do disco maior podemos colocar qualquer disco. Consequentemente, dados $n+1$ discos, se já soubermos transportar os n últimos para qualquer vareta em $M(n)$ movimentos, poderemos transportar os $n+1$ para a terceira vareta do seguinte modo: com $M(n)$ movimentos transporto os n últimos para a segunda vareta, a seguir coloco o disco grandão na terceira vareta, e finalmente coloco os discos que ficaram na segunda vareta na terceira, fazendo mais $M(n)$ movimentos. Conclusão: o número $M(n+1)$ de movimentos para transportar todos os $n+1$ discos para a terceira vareta é dado pela recursão:

$$M(n+1) = M(n) + 1 + M(n) = 1 + 2M(n).$$

Como $M(1) = 1$, desenrolando a recursão, obtemos: $M(2) = 1+2$, $M(3) = 1+2+2^2$, $M(4) = 1+2+2^2+2^3$, etc., sendo imediato verificar que $M(n) = 1+2+2^2+2^3+\ldots+2^{n-1} = 2^n - 1$. Logo o tempo gasto pelos monges será $M(64) = -1 + 2^{64} = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615$ segundos., o que acima vimos corresponder a cerca de 585 bilhões de anos.

✦ Problemas de revisão ✦

Problema 1
Obter fórmula iterativa para o número de diagonais de um polígono convexo de n vértices.

Problema 2
Calcular o valor numérico de $r = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}}$ *(aí existem infinitas raízes quadradas).*

Problema 3
O número r é dado pela fração contínua *a seguir (é dita ser "contínua" pois existem infinitos denominadores, ou seja: os denominadores continuam ad infinitum). Pede-se calcular o valor de r.*

$$r = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ldots}}}}}$$