LIÇÃO 2
Expressão algébrica de padrões gerais

No início da primeira lição, já adiantamos que a Álgebra nos dá uma notação e técnicas associadas que permitem resolvermos uma grande quantidade de problemas, entre os quais:

- expressar a *lei de formação* de um padrão ou uma regularidade (como a lei de formação de uma sequência de figuras semelhantes ou de uma sequência de números);
- escrever *fórmulas* com as quais expressamos a relação entre grandezas matemáticas ou físicas;
- escrever e resolver *equações* com as quais poderemos determinar o valor das grandezas desconhecidas de um problema matemático ou físico, a partir do conhecimento de grandezas mais acessíveis ou mais facilmente medíveis desse mesmo problema;
- reduzir um dado problema a um problema semelhante menor, e então mais fácil de resolver, o que se faz por meio de uma *recursão*.

O objetivo maior desta segunda lição é trabalhar com o primeiro tipo de problemas da lista acima: a expressão algébrica da *lei geral de formação* de um padrão ou regularidade matemática. Isso pode ser feito de duas maneiras principais: via fórmula, ou via recursão. Devido ao pouco tempo disponível, apresentaremos apenas a primeira maneira.

Para que possamos nos comunicar sem ambiguidades, iniciaremos elaborando a ideia de *igualdade algébrica*, a qual já foi usada informalmente na primeira aula. As fórmulas, a rigor as fórmulas algébricas, que usaremos para expressar a lei de formação dos padrões são um caso particular de igualdades algébricas.

1).– Igualdades algébricas

Na primeira aula, comparamos rapidamente os três tipos básicos e gerais de objetos algébricos:

expressão algébrica	$x^2 - y^2$	não tem sinal de igual e nem sinal de desigualdade
igualdade algébrica	$x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$	tem um sinal de igual, mas não de desigualdade
desigualdade algébrica	$\sqrt{xy} \leqslant \frac{x+y}{2}$	não tem sinal de igual, mas tem um de desigualdade

Agora, passaremos a uma caracterização mais precisa do segundo deles: as igualdades algébricas.

Igualdade algébrica é o que resulta ao juntarmos com o sinal de igual duas expressões algébricas. Toda igualdade algébrica tem o formato:

$$\boxed{\textit{expr. alg. 1} = \textit{expr. alg. 2}}$$

A expr. alg 1 é dita *membro da esquerda* e a expr. alg 2 é dita *membro da direita.*

Exemplos
Duas expressões algébricas são $2-x^2-\sqrt{1+x}$ e $x^3/3$. Igualando-as, produzimos a igualdade algébrica $2-x^2-\sqrt{1+x}=x^3/3$.
Note que é perfeitamente válido ocorrer que uma das duas expressões algébricas seja uma constante, como é o caso das igualdades algébricas: $2-x^2-\sqrt{1+x}=0$ e $x-x^2\sqrt{x^3}/3=5$.
Outros exemplos de igualdades algébricas: $ax+b=0$, $ax+b=cx+d$, $ax^2+bx+c=0$, $1-2x=1/x^2$, $(x-y)(x+y^2)=3$, $ax^2+bxy+cy^2=4$, $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$, $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, etc.

Contraexemplo
Com as duas primeiras expressões usadas no exemplo anterior, podemos escrever a *desigualdade* algébrica $2-x^2-\sqrt{1+x}<x^3/3$, assunto que não trataremos neste minicurso.

2). Fórmulas: algébricas e não algébricas

Fórmula algébrica é um tipo muito particular de igualdade algébrica: é toda igualdade na qual um dos membros se resume exclusivamente numa variável e o outro é uma expressão algébrica que *não contém tal variável:*

(uma variável) = (expr. algébrica com outras variáveis).

A variável isolada é a *variável dependente*, as demais são as *variáveis independentes*.

Exemplos
As fórmulas têm utilidade em problemas envolvendo duas ou mais variáveis e onde queremos expressar a relação de dependência de uma delas com a outra ou com as demais.

- Exemplos de fórmulas algébricas *usadas em Geometria:* $C=2\pi r$, $A=ab$, $a=\sqrt{b^2+c^2}$, etc.
- Exemplo de fórmulas algébricas *expressando as soluções de uma equação*: fórmulas de Bhaskara para as raízes da equação $ax^2+bx+c=0$:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

- Exemplos de fórmulas algébricas *expressando leis físicas:* $x=vt$, $F=ma$, $E=mc^2$, etc.

Exercício
Na lição 1, nos exemplos e exercícios que pediam a expressão algébrica do perímetro e/ou área de figuras, já trabalhamos com fórmulas algébricas. Reexamine o que lá foi feito. Em particular, verifique se encontramos situações onde uma mesma variável, por exemplo um perímetro, podia ser expresso por mais de uma fórmula. Em tais casos, as variáveis eram as mesmas?

Contraexemplos
Não são fórmulas algébricas: $x-y=az^2+b$ (razão: nenhum dos membros consiste de apenas uma letra ou variável), $y=x^2-y^2$ (razão: a letra y aparece nos dois membros da igualdade), $y=1+\text{sen}(x^2)$ (razão: membro da direita não é expressão algébrica, mas uma expressão analítica), $y<x^2$ (razão: a relação entre os dois membros não é uma relação de igualdade; dizendo de um outro modo: essa expressão não é sequer uma igualdade algébrica), $\sqrt{y}=1+x$ (razão: membro da esquerda envolve uma letra, mas também uma operação algébrica; o mesmo ocorre com o membro da direita).

Exercício
No exemplo anterior, demos três grandes usos da ideia de fórmula. Quais foram eles? Para cada um, V. seria capaz de acrescentar mais exemplos?

Existem fórmulas outras que as algébricas?
Resposta curta: sim!
Para uma resposta justificada, primeiro precisamos ver como estender a ideia de fórmula, de modo a podermos considerar fórmulas mais gerais do que as algébricas.

Primeiro modo de se fabricar fórmulas não algébricas
basta usarmos ao menos uma operação matemática que não seja algébrica, ou seja: usar ao menos uma operação matemática que não seja adição, subtração, multiplicação, divisão ou radiciação. Assim, dizemos que são exemplos de fórmulas não algébricas: $y = 1 + \operatorname{sen}(x)\cos(x)$, $y = \log(1 + x^4)$, $a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos(\varphi)}$, etc.

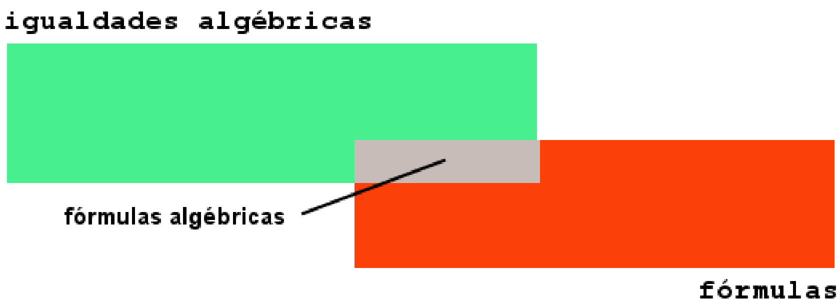
Segundo modo de se fabricar fórmulas não algébricas
basta usarmos uma quantidade infinita de qualquer tipo de operações matemáticas, algébricas ou não algébricas. O exemplo mais conhecido é a fórmula da soma de todos os termos de uma progressão geométrica: $S = a_0\big(1 + r + r^2 + r^3 + \dots\big)$, onde r é a razão da PG e a_0 é seu termo inicial.

O que se entende por fórmula em geral, possivelmente não algébrica?
intuitivamente, *assim denominarmos toda relação, via sinal de igualdade, de uma variável com outra ou outras variáveis combinadas por operações matemáticas.* Assim, $y = 1 + \operatorname{sen}(x^2)$, apesar de não ser igualdade algébrica, é um exemplo de fórmula (mas, não de fórmula algébrica).

Razão da impossibilidade de uma definição geral e precisa de fórmula
é impossível dar uma delimitação precisa de quais são as operações matemáticas permitidas numa fórmula. Sem isso, fica inviável atribuir sentido matemático e preciso à noção de fórmula em geral.

Resumindo
Embora a palavra “fórmula” seja amplamente empregada, ela não tem uma definição precisa. Contudo, é fácil caracterizar precisamente famílias simples de fórmulas, como é o caso das fórmulas algébricas e casos particulares dessas. No Ensino Médio, quando V. estudar as operações trigonométricas, logarítmicas e exponencias, V. passará a encontrar muitas fórmulas não algébricas. Na universidade V. aprenderá a trabalhar com fórmulas ainda mais complicadas.

Infelizmente, tudo isso é um pouco confuso, até fonte de muita incoerência e erros nos livros da Escola Básica. Como orientação, recomendamos que V. tenha sempre em mente a figura a seguir.



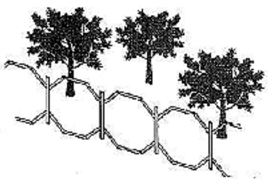
Exercício
Abaixo, estão escritas algumas fórmulas famosas. Quais delas são fórmulas algébricas?
a). Segunda Lei de Newton: $F = ma$
b). Fórmula de Einstein: $E = mc^2$
c). Fórmula do índice de massa corporal IMC de uma pessoa de m kg e altura h metros: $IMC = \frac{m}{h^2}$
(aqui temos exemplo onde uma variável é denotada por uma abreviação, e não por única letra; isso é uma prática muito comum em Informática, Economia, etc.)
d). Num triângulo de lados a, b, c temos: $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos(C)}$, onde C é o ângulo determinado pelos lados a e b.

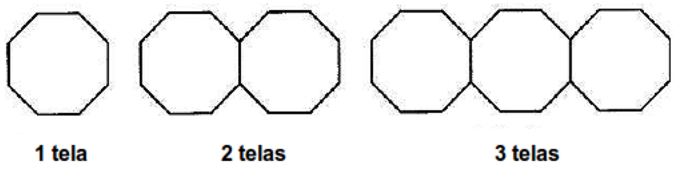
3). Problemas de padrões gerais

É comum encontrarmos problemas olímpicos em que precisamos descobrir a *lei de formação* de uma sequência de figuras semelhantes ou de uma sequência de números, e passar à expressão algébrica dessa lei, talvez seguida da demonstração de alguma sua propriedade. No que segue, trabalharemos com alguns problemas simples desse tipo.

Problema 1

Contexto do problema
Deseja-se cercar um terreno usando telas, cujo contorno é feito com barras de ferro, que são emendadas conforme figura abaixo. Note o formato octogonal das telas e a maneira como são emendadas.





O objetivo deste problema
é descobrir como calcular a quantidade de barras de ferro que precisamos para fazer uma cerca a partir do conhecimento do número de telas a usar.

Questão 1
Denotando por t o número de telas de uma cerca e por b o número total de barras dessa cerca, complete a tabela a seguir:

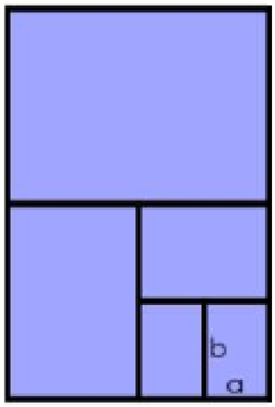
t telas	1	2	3	4		12
b barras	8		22			

Questão 2
Quantas telas terá uma cerca feita com 176 barras de ferro?

Questão 3
Expresse o número b de barras da cerca em termos do número t de telas, para qualquer valor de t.

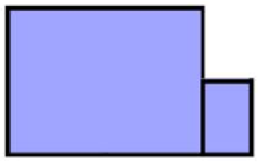
Questão 4
No caso de uma cerca circular (ou seja: a última tela emenda na primeira), como fica a fórmula expressando b em termos de t?

Problema 2



Contexto do problema
Partindo de uma folha A4 de papel, iniciamos cortando-a à metade (conforme figura abaixo), prosseguimos cortando a metade de uma das partes resultantes, e finalizamos fazendo o mesmo com uma dessas novas partes. Com isso, ficamos com cinco peças de papel. Por fim, considerando a menor dessas peças, denotamos por a o comprimento do seu menor lado e por b o do seu maior lado.

O objetivo deste problema
*é estudar o valor do **perímetro** das figuras que podemos fazer usando o maior e o menor desses cinco pedaços de papel quando eles forem ajuntados de acordo com a seguinte regra: "um lado do pedaço menor deve estar todo sobre um lado do maior e este será o único contato entre os pedaços".*
Como um exemplo de figura construida pela regra, confira abaixo a que Alberto fez.



Questão 1
Enquanto que o perímetro da figura de Alberto vale $p = 10a + 4b$, Beatriz construiu uma outra figura (usando a regra) que tem perímetro $p = 8a + 6b$. Você consegue desenhar a figura de Beatriz?

Questão 2
A regra permite construir figuras de perímetro diferente dos obtidos por Alberto e Beatriz?

Problema 3

Contexto do problema
Trabalharemos com os cinco pedaços de papel que produzimos no Problema 2.

O objetivo deste problema
*é estudar o valor **do perímetro e da área** das figuras que podemos fazer usando dois ou mais desses cinco pedaços de papel quando eles forem ajuntados de acordo com uma nova regra, a **regra2**: "quando dois pedaços estiverem em contato, um lado do menor deles deve estar todo sobre um lado do maior e este será o único contato entre esses dois pedaços".*

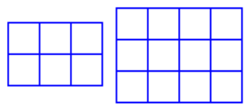
Questão 1
Qual o maior perímetro que se consegue obter usando todos os cinco pedaços e com eles fazendo uma figura que obedeça à regra2 ?

Questão 2
Sempre usando a regra2, V. consegue fazer duas figuras que tenham tanto perímetro como área iguais?

Questão 3
Carlos afirma que a regra2 permite construir uma figura de perímetro $p = 7a + 8b$. Você concorda?

Problema 4

Contexto do problema
Ao lado, no retângulo quadriculado 2 por 3 podemos ver 8 quadrados (confira!), e no 3 por 4 temos 20 quadrados (certo?). Queremos pensar mais genéricamente.



O objetivo deste problema
Estudar a possibilidade de existir um retângulo quadriculado que contenha um número dado de quadrados. Se existir um, achar os demais.

Questão 1
Examine a correção das afirmações seguintes e já procure detectar um padrão generalizável.
No retângulo quadriculado 2 por 3 temos: 2×3 *quadrados de lado 1, e* 1×2 *quadrados de lado 2; de*

modo que o total de quadrados vale $2\times3+1\times2$. *No retângulo 3 por 4 temos:* 3×4 *quadrados de lado 1,* 2×3 *de lado 2, e* 1×2 *de lado 3; de modo que o total de quadrados fica dado por* $3\times4+2\times3+1\times2$.

Questão 2
Escrevendo uma expressão algébrica para o número de quadrados contidos num retângulo quadriculado qualquer, x *por* y*, ache todos os retângulos quadriculados contendo 100 quadrados.*
Dica: para responder, V. terá que fazer tentativas. Sugiro iniciar com 4 por 11 (ou seja: $x=4$ *e* $y=11$*), e examinar o que ocorre ao aumentar, ou diminuir, o valor de* x *e* y.

4).– Dois alertas

– Primeiro alerta
Em testes psicotécnicos, é comum acharmos questões semelhantes a *"Dê o número que segue a sequência numérica* $1,4,9,\ldots$*"*. Queremos aqui alertar que esse tipo de questão tem infinitas respostas. Examinemos com cuidado esse exemplo típico.
Problema
Considere a questão: "Dê o número que segue a sequência $1,4,9,\ldots$*". Quem formulou a questão, provavelmente, estava pensando na fórmula* $N=n^2$ *(onde* $n=1,2,3,\ldots$*), mas existem outras, tais como* $N=(n-1)(n-2)(n-3)+n^2$.
Com efeito, pede-se:
a). verificar que as duas fórmulas acima geram, um após o outro, os números $1,4$ *e* 9*, mas a partir do quarto produzem números inteiros bem diferentes;*
b). achar outras fórmulas fazendo isso.
Dica: basta modificar ligeiramente a segunda fórmula.

– Segundo alerta
Os problemas que estudamos nesta aula tiveram uma resolução bem direta, até ingênua. Em muitas outras situações, como em muitos problemas olímpicos de Nível III, esse encaminhamento é inviável, *precisando-se usar métodos indiretos.*

Um dos mais importantes desses métodos indiretos consiste em descobrir como cada caso de um padrão em estudo é usado para produzir o próximo caso. Isso nos fornece uma *recursão* ou *recorrência*. Numa segunda etapa, essa recursão é resolvida por técnicas apropriadas, o que resulta numa fórmula que expressa a lei geral do padrão. Mesmo no Ensino Fundamental costuma-se apresentar dois exemplos de uso dessa metodologia, os muito conhecidos Problema das Torres de Hanói e o Problema dos Coelhos de Fibonacci. Também é comum se mostrar, ainda no EF, o cálculo recursivo do valor de π e $\sqrt{2}$.

O uso de recursões na Informática e Matemática Computacional é tão importante, ou mais, do que o uso de expresões algébricas. Apesar dessa importância, deixaremos o estudo disso tudo para um segundo curso de Álgebra Olímpica.

5).– Resumindo: conceitos essenciais desta aula

➤ **Expressão algébrica**
é o resultado que se obtém ao combinarmos (de um modo matematicamente significativo e em um número finito de vezes) os seguintes elementos: números, letras e símbolos das operações algébricas.

➤ **Igualdade algébrica**
é o resultado de igualarmos duas expressões algébricas:
primeira expr. = segunda expr.

➤ **Fórmula algébrica**
é apenas um tipo especial de igualdade algébrica:
variável = expr. alg. com outra(s) variáveis(s).
Lembre que em outros cursos também se usa fórmulas não algébricas: trigonométricas, logarítmicas, etc.

➤ **Variável**
Por *variável* de uma expressão, igualdade ou desigualdade algébrica entende-se qualquer letra nela envolvida (que não seja símbolo de uma constante, como π,φ, etc.).