LIÇÃO 4
Transformações algébricas

Com esta lição, estamos iniciando a parte prática deste minicurso. Agora, o objetivo é desenvolver técnicas que permitam descomplicar expressões algébricas, o que viabilizará a resolução de vários tipos de problemas, como é o caso das equações.

1).– Objetivo de uma transformação algébrica: redução, decomposição, ou fatoração

A tradução imediata ou natural de um problema em notação algébrica nem sempre produz expressões algébricas apropriadas para trabalharmos. Por isso, é essencial conhecermos técnicas capazes de transformá-las para um formato mais adequado para a resolução do problema. Antes de passarmos a essas técnicas, é importante termos em vista que toda transformação algébrica tem um de três possíveis objetivos: redução, decomposição, ou fatoração. Passamos a apresentá-los.

Reduzir
uma expressão algébrica que se apresenta como uma soma consiste em reescrevê-la na forma mais condensada que for possível reagrupando as parcelas de mesmo grau.
Exemplo modelo: $4x^2+6x-5+8x^3-2x^2-3x+4=8x^3+2x^2+3x-5$, onde já aproveitamos para escrever as parcelas em grau decrescente.

Decompor ou desenvolver
uma expressão algébrica consiste em reescrevê-la na forma de uma soma de duas ou mais parcelas. Usualmente, o desenvolvimento é seguido por uma redução, pois o objetivo disso tudo é descomplicar a expressão inicial.
Exemplo modelo: $(x-5)(2x-3)-3(x-2)=2x^2-3x-10x+15-3x+6=2x^2-16x+21$.
Na primeira etapa dessa transformação, a do desenvolvimento propriamente dito, usamos a propriedade $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$, que faz parte do elenco das propriedades algébricas fundamentais que logo estudaremos.

Fatorar
uma expressão algébrica consiste em reescrevê-la na forma de um produto de dois ou mais fatores.
Exemplo modelo: $x^4+5x^2=x^2(x^2+5)$; também poderia ter ficado como $x^4+5x^2=x(x^3+5x)$.

Conforme já ficou evidente pelos exemplos acima, para efetuarmos transformações algébricas é preciso conhecer e dominar as propriedades ou leis que regem as operações aritméticas com expressões algébricas. Embora essas sejam as mesmas que regem as operações aritméticas com números, passaremos a listá-las e exemplificá-las.

2).– Propriedades algébricas fundamentais

O conhecimento dessas propriedades é suficiente para decompor e reduzir bastante automaticamente qualquer expressão algébrica, desde que estejamos atentos aos sinais envolvidos. Contudo, a fatoração pode exigir maiores conhecimentos, várias tentativas e criatividade. Devido a isso e ao fato de a fatoração ser muito mais útil na resolução de problemas olímpicos, trataremos dela nas duas lições seguintes. Bem, mas antes de tudo, precisamos apresentar as propriedades ou leis fundamentais que serão utilizadas em qualquer dos três tipos de transformações algébricas.

Como as letras de cada expressão algébrica representam números, as leis que regem as operações com expressões algébricas são as mesmas que regem as operações aritméticas com números: comutatividade, associatividade, distributividade, etc. Vamos recordar e insistir apenas nas três que são a maior fonte de erros entre alunos: as regras de sinal, a distributividade da multiplicação em somas e a regra das potências.

Regras de sinal

- mais × menos = menos
- menos × menos = mais

Exemplos
$5 \cdot (-8) = -40$, $(-5) \cdot 8 = -40$, $(-5) \cdot (-8) = 40$.
$a \cdot (-b) = -(ab) = -ab$, $(-a) \cdot b = -(ab) = -ab$, $(-a) \cdot (-b) = ab$.

Distributividade da multiplicação

Esta é a principal propriedade que usamos tanto na redução como na decomposição. A aplicação da distributividade em expressões algébricas é totalmente análoga à distributividade em expressões numéricas. Confira seus formatos básicos:

- $a(b+c) = ab + ac$
- $a(b-c) = ab - ac$
- $(a+b)(c+d) = a(c+d) + b(c+d) = ac + ad + bc + bd$
- $(a+b)(c-d) = a(c-d) + b(c-d) = ac - ad + bc - bd$
- $(a-b)(c-d) = a(c-d) - b(c-d) = ac - ad - bc + bd$ (é onde os alunos erram mais!)

Basta guardar a primeira lei. As demais são consequência fácil dela e das regras de sinal.

Exemplos
• $2(5+3) = 2 \cdot 8 = 16$, e usando a distributividade: $2(5+3) = 2 \cdot 5 + 2 \cdot 3 = 10 + 6 = 16$
• $x(y+z) = xy + xz$
• $2(7-3) = 2 \cdot 4 = 8$, e usando distributividade e regra dos sinais: $2(7-3) = 2 \cdot 7 - 2 \cdot 3 = 14 - 6 = 8$.

Exemplos
Quando $a = c$ e $b = d$, temos:
pela terceira lei: $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$,
pela quinta lei: $(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$,
pela quarta lei: $(a+b)(a-b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - b^2$.
Essas três identidades são de enorme utilidade e são o que chamamos de *Três Identidades Notáveis*.
Dada sua enorme utilidade, desde já procure memorizá-las. Na lição seguinte serão estudadas com maior detalhes, bem como outras igualdades também importantes.

$$\boxed{\begin{aligned} (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\ a^2 - b^2 &= (a+b)(a-b). \end{aligned}}$$

Exercício

Para cada expressão a seguir, acrescente uma única parcela de modo a resultar numa expressão que possa ser escrita como um quadrado.

• $v^2 - 2uv$ • $4x^2 + 8x$ • $1 - 2a$ • $x^2 + y^2$ • $4u^2 + 4v^2$ • $9x^2 + \frac{1}{4}$ • $\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{25}$.

Regra das potências

- $x^m \times x^n = x^{m+n}$
- $ax^m \times bx^n = ab\,x^{m+n}$
- $(xy)^n = x^n\,y^n$
- $(x^m)^n = x^{mn}$

Exemplos

Usando a Regra das Potências e a distributividade, mais muita atenção e paciência:

• $(4a^2 - a^3)a^2 = 4a^2 \cdot a^2 - a^3 \cdot a^2 = 4a^4 - a^5$

• $(a^2 - a - 1)(-a^2) = a^2 \cdot (-a^2) - a \cdot (-a^2) - (-a^2) = -a^4 + a^3 + a^2$

• $(1 - 2xy + 5x^2)(-4xy^2) = -4xy^2 + 8xy \cdot xy^2 - 20x^2 \cdot xy^2 = -4xy^2 + 8x^2y^3 - 20x^3y^2$.

3).– Erros comuns em transformações algébricas

Além de ser obrigatório memorizar as propriedades fundamentais vistas acima, outra dica básica para evitar erros é:

na dúvida se uma passagem vale, ou não, teste com valores numéricos.

Também é importante ter bastante disciplina: escrever devagar, pensando na validade de cada transformação e cuidando para não cair na tentação de simplificar além do permitido.

	Cuidado!	**Correto/justificativa**
Cálculos impossíveis	$\frac{0}{0} \neq 1$, $\frac{2}{0} \neq 0$, $\frac{2}{0} \neq 2$ $\sqrt{-4} \neq 2$	Divisão por zero não tem sentido $\sqrt{-4}$ não é número real
Distributividade	$-a(x-2) \neq -ax - 2a$	$-a(x-2) = (-a)(x) + (-a)(-2) = -ax + 2a$ (o menos de $-a$ vai junto)
Associatividade	$a - (b - c) \neq (a - b) - c$	$a - (b - c) = (a - b) + c$, pois $-(-c) = c$; $8 - (6 - 2) \neq (8 - 6) - 2$, pois $8 - 4 \neq 2 - 2$
Frações	$\frac{1}{1+x} \neq 1 + \frac{1}{x}$ $\frac{a}{b+c} \neq \frac{a}{b} + \frac{a}{c}$ $\frac{a+bx}{a} \neq 1 + bx$	Impossível simplificar; por ex., com $x = 1$: $\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \neq 1 + \frac{1}{1} = 2$. Mesma razão do caso anterior. $\frac{a+bx}{a} = \frac{a}{a} + \frac{bx}{a} = 1 + \frac{bx}{a}$
Radiciação	$\sqrt{1+x} \neq 1 + \sqrt{x}$ $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ $\sqrt{x^2 + a^2} \neq x + a$	Impossível simplificar; por ex., se $x = 3$: $2 = \sqrt{4} = \sqrt{1+3} \neq 1 + \sqrt{3}$ Por ex.: $x = a = 1$ dá $\sqrt{2} = \sqrt{1+1} \neq 1 + 1$.
Potências	$(2x+2)^2 \neq 2(x+1)^2$ $(x+a)^2 \neq x^2 + a^2$	$(2x+2)^2 = 2^2\,(x+1)^2 = 4(x+1)^2$ $(x+a)^2 = (x+a)(x+a) = x^2 + a^2 + \mathbf{2ax}$

Exercício

As passagens abaixo talvez não estejam incluídas na tabela acima, porém V. pode testar sua veracidade com a Dica Básica (= teste com valores numéricos) .

$\sqrt{-x+a} = -\sqrt{x-a}$? $\sqrt{5x} = 5\sqrt{x}$? $\dfrac{6x+y}{6x-y} = \dfrac{x+y}{x-y}$? $x(2x-1)^2 = (2x^2-1)^2$?

4).– Exercícios de decomposição e redução

Aqui, o objetivo é exercitar os resultados anteriores fazendo alguns exemplos das transformações mais simples: a decomposição (também chamada de desenvolvimento) e a redução. Ficará para as próximas lições estudarmos o tipo mais técnico de transformação: a fatoração

Exercício

Decompor e depois, se for o caso, reduzir as seguintes expressões:

- $3x^2+(7-2x)-(2x^2-1)-(-3-5x)$
- $-3(2-x)-(x-5)$
- $-3(2-x)-5(x-4)$
- $(2+x)\cdot(1+\frac{1}{x})$
- $(a^2-b^2-a^2b^2)\cdot(-ab)$
- $(x^4-x^8y+y^3)\cdot x^4y^3$

Exercício

Completar as seguintes igualdades algébricas.

- $(\boxed{}-4)^2=25x^2-\boxed{}+16$
- $\left(\frac{1}{2}x+\boxed{}\right)^2=\boxed{}+x+1$
- $(\boxed{}+\boxed{})^2=0,01b^2+0,2bc+c^2$
- $(\boxed{}+\frac{1}{3})^2=\frac{9}{16}x^2+\boxed{}+\boxed{}$
- $(\boxed{}-\boxed{})\cdot(\boxed{}+\frac{1}{4})=4x^2-\boxed{}$
- $(\sqrt{3}x+\boxed{})^2=\boxed{}+\boxed{}+y^2$
- $(x-3)^2=x^2\ \boxed{}$
- $(x+5)(x-5)=x^2\ \boxed{}$

Exercício

Decompor e depois, se for o caso, reduzir as seguintes expressões:

- $(a+1)^2-(a^2+1)$
- $(x^2+y^2)^2$
- $(2x^2-3y^2)$
- $(a-2)(2a-4)(1-a)$ Dica: $xyz=xy\cdot z$
- $(u+1)^3$ Dica: $(u+1)^2\cdot(u+1)$
- $(a+b+c)^2$ Dica: $(x+c)^2$, com $x=a+b$
- $(2a-3b+4c)^2$
- $(a-b+c-d)^2$

Exercício

Decompor e depois, se for o caso, reduzir as seguintes expressões:

- $\frac{16a^5b}{8a^6b^2c^2}$
- $\frac{x^2-x}{x}$
- $\frac{xy+y^2-y}{y}$
- $\frac{ab+ac-bc}{abc}$

5).– Resumindo e reforçando

- **Existem três tipos de transformações algébricas**
decomposições, reduções e fatorações.
- **Decompor ou desenvolver**
uma expressão algébrica consiste em reescrevê-la na forma de uma soma de duas ou mais parcelas.
- **Reduzir**
uma expressão algébrica consiste em reescrevê-la na forma mais condensada possível; tipicamente, isso é feito aglutinando parcelas de mesmo grau.
- **Fatorar**
uma expressão algébrica consiste em reescrevê-la na forma de um produto de dois ou mais fatores.
- **Propriedades algébricas fundamentais**
enfatizamos a regra dos sinais, a distributividade da multiplicação e a regras de potências. É essencial dominá-las perfeitamente, pois são a mais comum fonte de erros dos alunos.
- **As três identidades notáveis**
de enorme utilidade, é indispensável memorizá-las:
$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

Problema

Que padrão geral sugerem as igualdades: $2\times4+1=9$, $3\times5+1=16$, $4\times6+1=25$, $9\times11+1=100$ *? Expresse-o verbalmente e via igualdade algébrica; prove que vale sempre.*

Problema

Escolha qualquer número inteiro de dois dígitos e calcule seu quadrado. Depois, inverta aqueles dois dígitos e calcule o quadrado do número resultante. Quando a diferença dos dois quadrados também for um quadrado, quem pode ser o número original?

Dica. Denotando por a e b tais dígitos, V. deverá chegar a uma equação tipo $a^2-b^2=11$, a qual pode ser resolvida por tentativas facilmente, se usar uma identidade notável e que a e b são dígitos.