LIÇÃO 6
Fatoração de expressões algébricas

O leitor já deve saber da enorme utilidade da fatoração dos números inteiros, por exemplo quando associada à ideia de número primo. A fatoração das expressões algébricas também tem enorme utilidade. Nesta lição estudaremos suas técnicas mais elementares.

1).– A ideia de fatoração de expressões algébricas

Fatorar uma expressão algébrica consiste em transformá-la num produto de dois ou mais fatores. Todas as técnicas de fatoração baseiam-se no uso da propriedade distributiva da multiplicação numa soma. Como tal, no final do trabalho, a fatoração se resume em escrever, para A, B, C, D , etc. números, variáveis ou até mesmo expressões algébricas (por isso usamos letras maiúsculas):
$AB + AC = A(B + C)$, $AB + AC + AD = A(B + C + D)$, $AB + AC + AD + AE = A(B + C + D + E)$, etc.
Temos óbvias modificações das igualdades acima quando um ou mais dos sinais + forem trocados pelo sinal $-$. Por exemplo:
$AB - AC = A(B - C)$, $AB - AC + AD = A(B - C + D)$, $AB - AC - AD = A(B - C - D)$, etc.
Na prática, frequentemente *também* temos de usar a comutatividade. Observe com cuidados os exemplos a seguir:
$AB + CA = A(B + C)$, $BA + AC + DA = A(B + C + D)$, $AB + CA + DA + AE = A(B + C + D + E)$, etc.
Para quem ainda tem pouca experiência, pode ser mais seguro explicitar a etapa do uso da comutatividade, por exemplo: $BA + AC + DA = AB + AC + AD = A(B + C + D)$.

2).– Fatoração usando fator comum aparente

Este fator pode ser um número, uma variável ou mesmo uma expressão algébrica menor que está mais ou menos evidente a nossos olhos em cada parcela da expressão algébrica que precisamos fatorar. Exemplifiquemos.

- exemplo onde o fator comum é um número:
  $6x + 9 = 3 \cdot 2x + 3 \cdot 3 = 3(2x + 3)$;
- exemplo onde o fator comum é uma variável ou potência de uma variável:
  $5x^3 - 7x^2 = 5x \cdot x^2 - 7 \cdot x^2 = (5x - 7) \cdot x^2 = x^2(5x - 7)$;
- exemplo onde o fator comum é uma expressão:
  $2x^2(x - 3) + 8x(x - 3) = 2x^2 \cdot (x - 3) + 8x \cdot (x - 3) = (x - 3)\big(2x^2 + 8x\big) = 2x(x - 3)(x + 4)$.

Na prática, procura-se escrever apenas *(expressão dada) = (expressão fatorada)*. Assim, abreviamos os exemplos acima: $6x + 9 = 3(2x + 3)$, $5x^3 - 7x^2 = x^2(5x - 7)$, $2x^2(x - 3) + 8x(x - 3) = 2x(x - 3)(x + 4)$.

Exemplo
Fatorar a expressão algébrica: $(x - 5)(2x - 1) + (x + 2)(5 - x)$.
Resolução. O fator comum fica aparente se observarmos que $(5 - x) = -(x - 5)$, como enfatizamos com negrito a seguir: $(x - 5)(2x - 1) + (x + 2)(5 - x) = (\mathbf{x - 5})(2x - 1) - (x + 2)(\mathbf{x - 5})$. Usando a comutatividade do produto, a fatoração fica:
$(x - 5)(2x - 1) + (x + 2)(5 - x) = (x - 5)(2x - 1) - (x - 5)(x + 2) = (x - 5)\big((2x - 1) - (x + 2)\big) = (x - 5)(x - 3)$.
A rigor, depois da fatoração fizemos uma redução que não havia sido pedida.

Exemplo
Fatorar e reduzir a expressão: $(2x-1)(3x+2)-(x-3)(2x-1)$.
Resolução. Iniciamos detectando o fator comum, em negrito a seguir: $(\mathbf{2x-1})(3x+2)-(x-3)(\mathbf{2x-1})$.
A seguir, fazemos a fatoração: $(2x-1)(3x+2)-(x-3)(2x-1) = (2x-1)\big((3x+2)-(x-3)\big)$. Finalmente, reduzindo a expressão do segundo parentêsis, chegamos ao resultado final:

$$(2x-1)(3x+2)-(x-3)(2x-1) = (2x-1)(2x+5)\,.$$

Exemplo
Agora, uma fatoração cujo resultado tem mais de dois fatores. Seja fatorar ao máximo que for possível a expressão algébrica: $(2u-1)(3u-4)-(3u-4)$.
Resolução. Fator comum aparente é $3u-4$, de modo que
$(2u-1)(3u-4)-(3u-4) = (2u-1)(3u-4)-1\cdot(3u-4) = (3u-4)\big((2u-1)-1\big) = (3u-4)(2u-2) = 2(3u-4)(u-1)$.

Exemplo
Novamente, uma fatoração cujo resultado tem mais de dois fatores. Seja fatorar ao máximo que for possível a expressão algébrica: $(a+4)(2a-2)(3a-1)+(a+4)(2a-2)(5a-3)$.
Resolução. Aqui, o fator comum é um produto: $(a+4)(2a-2)$, de modo que temos:
$(a+4)(2a-2)(3a-1)+(a+4)(2a-2)(5a-3) = (a+4)(2a-2)\big((3a-1)+(5a-3)\big) = (a+4)(2a-2)(8a-4)$.

Exercício
Fatorar com redução as seguintes expressões algébricas.
- $(x+3)(2x+4)+(x+8)(x+3)$
- $(y+4)(2y-2)(3y-1)+(y+4)(2-2y)(5y-3)$
- $(2u-1)(u+1)-u-1$
- $(2x-5)^2-(2x-5)(2x+2)$
- $(a-4)^2-a+4$

3).– Fatoração usando identidades algébricas

Precisando fatorar uma expressão, é comum termos de apelar para alguma identidade algébrica para conseguirmos tornar aparente um fator comum. Exemplifiquemos essa ideia.

Exemplo
Fatorar $-36x^2+9$.
Resolução. Como cada parcela é um quadrado, devemos pensar na identidade notável $a^2-b^2 = (a+b)(a-b)$. Para evitar erros, iniciamos escrevendo os termos no formato tradicional a^2-b^2 e só então aplicamos a identidade:
$-36x^2+9 = 9-36x^2 = (3)^2-(6x)^2 = (3+6x)(3-6x) = 3(1+2x)3(1-2x) = 9(1+2x)(1-2x)$.
Ainda mais inteligentemente:
$-36x^2+9 = 9-36x^2 = 9(1-4x^2) = 9(1+2x)(1-2x)$.

Exemplo
Fatorar a expressão $(3x-2)^2-5$.
É análogo ao anterior, só que mais complexo. Fazendo $a=(3x-2)$ e $b=\sqrt{5}$, obtemos: $(3x-2)^2-5 = (3x-2)^2-(\sqrt{5})^2 = (a+b)(a-b) = \big((3x-2)+\sqrt{5}\big)\big((3x-2)-\sqrt{5}\big) = (3x-2+\sqrt{5})(3x-2-\sqrt{5})$.

Exemplo
Fatorar $(x+1)(x+2)+x^2+2x+1$.
Tornamos aparente um fator comum atinando que $x^2+2x+1 = (x+1)^2$. Isso permite prosseguir facilmente: $(x+1)(x+2)+x^2+2x+1 = (x+1)(x+2)+(x+1)^2 = (x+1)\big((x+2)+(x+1)\big) = (x+1)(2x+3)$.

Exemplo

Fatorar $(x+1)^2 - x^2 + 4x - 4$.

Resolução. A expressão parcial $-x^2 + 4x - 4 = -x^2 + 2 \cdot 2x - (2)^2$ nos faz pensar na identidade notável $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$. Podemos usá-la observando que $(x+1)^2 - x^2 + 4x - 4 = (x+1)^2 - (x^2 - 4x + 4) = (x+1)^2 - (x-2)^2$. Resta observar que esta última expressão pode ser fatorada via $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.

Usando essa *segunda* identidade notável, podemos concluir:

$(x+1)^2 - x^2 + 4x - 4 = (x+1)^2 - (x-2)^2 = \big((x+1) + (x-2)\big)\big((x+1) - (x-2)\big) = (2x-1)(3) = 3(2x-1)$.

Outra maneira de resolver, agora, usando apenas a primeira identidade notável:

$(x+1)^2 - x^2 + 4x - 4 = (x^2 + 2x + 1) - x^2 + 4x - 4 = 6x - 3 = 3(2x-1)$.

Existem outras técnicas de fatoração que as mostradas acima, mas que não teremos tempo para abordar neste minicurso. Entre essas outras técnicas de fatoração, duas das mais úteis são:

- a técnica dos coeficientes indeterminados
- o uso do Teorema Fundamental da Álgebra, o qual diz que todo polinômio de coeficientes reais pode ser fatorado como um produto de fatores da forma $ax + b$ e/ou fatores da forma $cx^2 + dx + e$, onde todos os coeficientes a, b, c, d, e são números reais; uma maneira de determinarmos esses fatores consiste em calcular as raízes da equação polinomial associada; as lições que se seguirão mostrarão os detalhes disso tudo.

4).– Resumindo e reforçando

➤ Vimos duas técnicas de fatoração

Uma bem direta, pois baseada na detecção de um fator comum aparente, e outra baseada no uso das identidades algébricas.

➤ Existem outras técnicas de fatoração

Mencionamos rapidamente duas dessas: a técnica dos coeficientes indeterminados e a baseada no resultado mais importante da Álgebra, que é o Teorema Fundamental da Álgebra e que está associado a noção de raízes de equações polinomiais. Tudo isso, assunto de futuras lições.

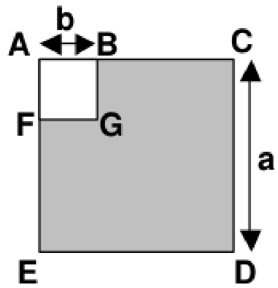
Problema

Mostrar que, para valores a e b que pede-se calcular, vale: $\dfrac{3x^2 + 2x - 1}{2x^2 + 2x} = a + \dfrac{1}{bx}$.

Problema

A parte sombreada da figura ao lado representa a propriedade de um agricultor. Nesta figura, ACDE e ABGF são quadrados. O agricultor saiu caminhando desde o ponto C, seguindo o contorno de sua propriedade e na ordem C, B, G, F, E. Se quando ele chegou no ponto F já tinha caminhado 120 metros, quantos metros faltavam para ele chegar no ponto E?

É conhecido que sua propriedade tem 7 200 metros quadrados de área.



Problema

Mostre que a fórmula $y = x^2 - 8x + 7$ *também pode ser escrita como* $y = (ax + b)^2 - 9$, *para* a *e* b *a achar. Conclua disso que y atinge um valor mínimo ao x variar entre todos os números reais.*

Problema

Abaixo são dadas fórmulas expressando a relação de dependência entre duas variáveis x *e* y *, e onde* p *e* q *são parâmetros. Deseja-se saber o comportamento do sinal de* y *com a variação de* x *. Em particular, descreva o conjunto dos valores de* x *que dão* $y > 0$*; idem para os* x *dando* $y < 0$.

Sugere-se fatorar o que for possível no membro da direita de cada fórmula, e só então estudar como varia o sinal.

$a).\ y = 1 + \dfrac{x^7 - x^2}{x^6 - x}$ $\qquad b).\ y = x^2 + (p+q)x + pq$ $\qquad c).\ y = \dfrac{x^3 - 2x^2 + 2x - 1}{x - 1}$ (esta só para $x \geqslant 0$)