Resolução de problemas matemáticos

Este é um assunto bastante complexo, sendo que as primeiras tentativas de sistematizá-lo iniciaram com Henri Poincaré e George Polya, entre 1900 e 1940. Polya (figura ao lado) escreveu vários livros sobre o assunto, o mais famoso deles sendo *A arte de resolver problemas.* Nesta ficha, resumimos e enfatizamos apenas três aspectos básicos dessa problemática:

✔ atitude
✔ estratégia implementando a atitude
✔ aproveitar recomendações facilitadoras

1).– Atitudes na resolução de problemas olímpicos

- adotamos uma **atitude negativa** quando nosso conhecimento ou experiência nos levam a suspeitar da veracidade do que se afirma no problema.
- adotamos uma **atitude positiva** quando não temos elementos para duvidar da veracidade do que foi afirmado no problema olímpico.

2).– Estratégias para implementar a atitude adotada

✔ **estratégias negativas**:
  – achar contraexemplo
  – raciocinando por absurdo, mostrar contradição da afirmação do problema

✔ **estratégias positivas**:
  – construir um objeto descrito/proposto no problema
  – verificar todos os casos (exaustão)
  – deduzir.

O estudo dos métodos de dedução é essencial no aprendizado da Matemática. Dentre esses métodos, neste curso trataremos apenas da dedução direta, da dedução por absurdo e da dedução por indução matemática.

3).– Recomendações facilitando a resolução

✔ desenhar esquema ou figura que resuma as informações dadas no problema
✔ pensar em dividir o problema em casos
✔ estudar configurações ou situações particulares do problema, tais como situações extremas
✔ pode ser mais fácil resolver o problema do fim para o começo
✔ usar técnicas de descomplicação do problema.

As técnicas de descomplicação requerem um estudo e treinamento aprofundado, o qual será feito em lições futuras. Por enquanto, mencionamos rapidamente três das mais usadas:

– Descomplicação por fatoração
Frequentemente ocorre que seja mais fácil trabalharmos com produtos do que com somas. A fatoração mais útil é $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$. Ela pode ser generalizada para $n \geqslant 2$, desde que seja pensada como $a^n - b^n = (a-b)\times$ polinômio em a e b. Por exemplo:
$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)\,, \quad a^4 - b^4 = (a-b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)\,, \quad$ etc.

– Descomplicação telescópica
Aplica-se tanto no caso de somas como de produtos. A ideia é transformar as parcelas (ou fatores) dados em diferenças (ou quocientes) que produzirão sucessivos cancelamentos, como em:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{1000} = (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + (b_3 - b_4) + \ldots + (b_{1000} - b_{1001}) = b_1 - b_{1000}$$
$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_{1000} = \frac{b_1}{b_2} \cdot \frac{b_2}{b_3} \cdot \frac{b_3}{b_4} \cdots \frac{b_{1000}}{b_{1001}} = \frac{b_1}{b_{1001}}\,.$$

Para conseguirmos fazer aparecer os pares que se cancelam, pode ser que tenhamos de acrescentar uma nova parcela (fator) na soma (produto) dado.

– Resolução recursiva de problemas
Reduzimos o problema dado a um problema semelhante e "menor", ou a um caso anterior.
Exemplo modelo: Problema das Torres de Hanói.