Funções

Problema 1

Sejam dois polinômios de coeficientes reais e da forma $p(x) = x^2 + ax + b$, $q(x) = x^2 + Ax + B$. *Supondo que eles verifiquem* $p(7) + p(11) = q(7) + q(11)$, *pede-se:*

a). *provar que* $p(9) = q(9)$;

b). *provar que se existir* $y \neq 9$ *tal que* $p(y) = q(y)$, *então* $p(x) = q(x)$, *para todos os* $x \in \mathbb{R}$.

Problema 2 -

Seja a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *a qual, para cada* $x \in \mathbb{R}$, *é dada por:*

$$f(x) = (x+1) - 2(x+2) + 3(x+3) - 4(x+4) + \ldots + 2009(x+2009) - 2010(x+2010).$$

Pede-se todas as raízes da equação $f(x) = 0$.

Problema 3 -

Seja a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *que verifica* $f(x/3) = x^2 + x + 1$, *para todos os* $x \in \mathbb{R}$. *Pede-se o valor numérico da soma de todos os* $y \in \mathbb{R}$ *verificando* $f(3y) = 7$.

Problema 4 -

Sejam as funções f *e* g *definidas por* $f(x) = 1/x$ *e* $g(x) = 1 - x$. *A partir delas, definimos uma sequência de* 100 *funções,* $F_1, F_2, F_3, \ldots, F_{100}$, *por meio das seguintes recursões:*

$$F_1(x) = g\big(f(x)\big),\ F_2(x) = g\big(f(F_1(x))\big),\ F_3(x) = g\big(f(F_2(x))\big),\ F_4(x) = g\big(f(F_3(x))\big),\ \textit{etc.}$$

Pede-se expressar o valor de $F_{100}(2016)$ *por meio de uma fração ordinária irredutível.*

Problema 5 -

Seja f *uma função real de variável real que tem as seguintes propriedades:*

$$f(1) = 7 \ \textit{e} \ f\big(x \cdot f(y)\big) = x \cdot f\big(f(y)\big), \textit{ para todos os reais positivos } x \textit{ e } y.$$

Pede-se expressar o valor de $f(2015)$ *como um número inteiro.*

Problema 6 -

Seja a função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ *dada por* $f(n) = n + 3$ *para os* n *ímpares, e por* $f(n) = n/2$ *para os* n *pares. Pede-se provar que existe exatamente um* k *ímpar tal que* $f(f(f(k))) = 27$. *Feito isso, achar a soma dos dígitos da representação decimal de tal* k.