Identidades algébricas

São inúmeras as aplicações das identidades algébricas, em particular são a base das principais técnicas de fatoração.

1).- Identidades algébricas notáveis do segundo grau

São ditas notáveis por serem as identidades mais usadas. É muito importante memorizá-las e estar sempre atento para a possibilidade de usá-las, mesmo que as aparências escondam isso.

> Para desenvolver:
> - $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$
> - $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$
>
> Para fatorar:
> - $(a^2-b^2) = (a+b)(a-b)$
> - (a^2+b^2) não tem fatoração com números reais.

Demonstração
Basta, essencialmente, usar a distributividade.
Primeira: $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a(a+b)+b(a+b) = a^2+ab+ba+b^2 = a^2+2ab+b^2$.
Segunda: é caso particular da primeira, $(a-b)^2 = \big(a+(-b)\big)^2 = a^2+2a(-b)+(-b)^2 = a^2-2ab+b^2$.
Terceira: iniciando com o produto, $(a+b)(a-b) = a(a-b)+b(a-b) = a^2-ab+ab-b^2 = a^2-b^2$.

Exemplos
- $x^2-1 = (x+1)(x-1)$
- x^2+1 não é fatorável com números reais
- $(a+b)^2+(a-b)^2 = 2(a^2+b^2)$
- $(a+b)^2-(a-b)^2 = 4ab$
- $(x+1)^2-(x^2+2x+1)(x+2) = (x+1)^2-(x+1)^2(x+2) = (x+1)^2\cdot\big(1-(x+2)\big) = (x+1)^2\cdot(-x-1) = -(x+1)^3$
- $(2x+1)(2x-1)-4x^2 = (4x^2-1)-4x^2 = -1$

Exercício
Usando as identidades notáveis e calculando inteligentemente, mostre que
$$(a+b+c)^2-(a-b+c)^2 = 4b(a+c)\,, \quad (a+b+c)^2-(a-b-c)^2 = 4a(b+c)$$
Dica: faça $x = a+b$ e $y = a-b$.

Exercício
De duas maneiras, calcule de cabeça o valor de 21^2. *Dica: use* $(20+1)^2$ *e* 21^2-20^2.

2).- Identidades algébricas para desenvolver em grau três ou maior

> - $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
> - $(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
> - $(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$
> - $(a-b)^4 = a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4$
>
> etc., etc.
> Também podemos pensar recursivamente, por exemplo:
> - $(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2 =$ etc.
> - $(a-b)^4 = (a-b)(a-b)^3 =$ etc.

Demonstração
Usaremos a versão recursiva e partiremos das identidades notáveis de segundo grau.
Primeira: $(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2 = (a+b)(a^2+2ab+b^2) = (a^3+2a^2b+ab^2)+(ba^2+2ab^2+b^3) =$
$= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.
Segunda: $(a-b)^3 = (a-b)(a-b)^2 = (a-b)(a^2-2ab+b^2) = (a^3-2a^2b+ab^2)-(ba^2-2ab^2+b^3) =$
$= a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$. Análogo par demais graus.

3).- Identidades algébricas para fatorar em grau três ou maior

- $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$
- $a^4+b^4=(a+b)(\text{impossível})$
- $a^5+b^5=(a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)$

(Fatora só em casos de grau ímpar.)

- $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$
- $a^4-b^4=(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)$
- $a^5-b^5=(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)$

(Fatora em todos os graus.)

Demonstração
Basta multiplicar os termos da direita e simplificar. Fica como exercício simples.

Exemplo
Sabendo que $x+y=8$ e que $xy=13$, podemos determinar o valor de x^3+y^3?
Partindo de $(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$, obtemos:

$$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=8^3-3\times 13\times 8=512-312=200\,.$$

Exemplo (muito importante)
Achar todos os números primos da forma n^3-1, com n inteiro positivo.
Como $n^3-1=(n-1)(n^2+n+1)$ e $n^2+n+1\geqslant 2$, para n^3-1 ser primo somos obrigados a ter $(n-1)=1$, ou seja: $n=2$. Logo, ou 2^3-1 é um primo da forma n^3-1, ou não há nenhum outro deste tipo. Como $2^3-1=7$ é primo, segue que há exatamente um primo de tal forma: o número 7.

4).- Exemplos de aplicações dessas identidades

✔ Calcular o quadrado de um número

As vezes, conseguimos escrever o número dado como a soma, ou a diferença, de dois outros cujo quadrado é mais fácil de calcular.
Exemplo
Seja calcular 5003^2.
Em vez do cálculo direto do quadrado, o que será demorado e pode gerar erros, exploremos que $5000=5000+3$, e que ambas estas parcelas têm um quadrado muito fácil de calcular. Com efeito,

$$5003^2=(5000+3)^2=5000^2+6\times 5000+3^2=25\,000\,000+30\,000+9=25\,030\,009\,.$$

Exercício
Calcule de cabeça o valor de 31^2 de dois modos: usando $(30+1)^2$ e usando 31^2-30^2.

✔ Calcular o valor da diferença de dois quadrados

Usando $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$, transformamos o trabalho de calcular dois quadrados e sua diferença no trabalho de calcular uma soma, uma diferença e um produto, o que certamente é mais rápido.
Exemplo
Seja calcular 87^2-13^2.
Usando a identidade acima, temos: $87^2-13^2=(87+13)\cdot(87-13)=100\cdot 74=7\,400$.

Essa técnica pode ser usada em expressões numéricas aparentemente dissociadas de diferenças de quadrados. Para termos sucesso, evidentemente, teremos de fazer algumas transformações algébricas até produzirmos a diferença de quadrados. O problema a seguir ilustra esta observação.
Problema
Calcular $6^4+54^2+9^4$. *Inicie observando que temos uma expressão da forma a^2+ab+b^2, onde $a=6^2$ e $b=9^2$, a seguir use que $a^2+ab+b^2=a^2+2ab+b^2-ab$, e continue daí.*
Resp.: $117^2-54^2=$ etc.

✔ **Calcular o valor de uma expressão a partir do valor de outra**

Para se conseguir ver como a expressão de valor conhecido pode ser encaixada como uma componente da expressão a calcular deve-se procurar, entre as identidades já listadas, uma que envolva essas duas expressões. Entendamos isso por meio de um exemplo.

Exemplo

Sabendo que $x+\frac{1}{x}=a$*, expressar em termos de a o valor de* $x^2+\frac{1}{x^2}$.

Solução. Observe que $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+2+\frac{1}{x^2}=x^2+\frac{1}{x^2}+2$, de modo que $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=a^2-2$.

Problema

Sabendo que $x+\frac{1}{x}=a$*, expressar em termos de a o valor de* $x^8+\frac{1}{x^8}$.

✔ **Simplificar um denominador envolvendo raízes quadradas**

Os casos mais comuns são os das frações que têm denominador da forma $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ ou $\sqrt{a}+\sqrt{b}$. Em tais casos, usamos a identidade notável $x^2-y^2=(x+y)(x-y)$, com $x=\sqrt{a}$ e $y=\sqrt{b}$.

Exemplo

$\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{5-2}=\frac{1}{3}(\sqrt{5}+\sqrt{2})$, $\quad\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)}=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{5-2}=\frac{1}{3}(\sqrt{5}-\sqrt{2})$.

Problema

Achar o menor número inteiro n verificando: $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}\geqslant 100$.

Resp.: $n=10\,200$.

✔ **Fatorar uma expressão algébrica**

Pela importância desta aplicação, dedicaremos a próxima lição inteiramente a ela.

5).- Identidades notáveis para frações

- $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{b+a}{ab}$
- $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}$
- $\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}=\frac{2n+1}{n(n+1)}$
- $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}$
- $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}$, note que também vale $\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n-1}{n(n+1)}$, mas é pouco útil.

Demonstração

Primeira: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{b}{ab}+\frac{a}{ab}=\frac{b+a}{ab}$. Segunda: $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b}{ab}-\frac{a}{ab}=\frac{b-a}{ab}$.

Terceira, quarta e quinta são casos particulares dessas.

Exemplo

Mostrar que $\frac{4x-1}{x-2}=4+\frac{7}{x-2}$*, para todos os números reais* $x\neq 2$.

Iniciar pelo membro da esquerda é mais difícil do que pela direita. Entendido isso, temos:

$$4+\frac{7}{x-2}=\frac{4(x-2)}{x-2}+\frac{7}{x-2}=\frac{4(x-2)+7}{x-2}=\frac{4x-8+7}{x-2}=\frac{4x-1}{x-2}.$$

Entre outras coisas, este exemplo chama a atenção para o fato que as identidades acima também valem para números não inteiros; elas valem até mesmo para números irracionais.