Identidades algébricas

Resumo da teoria

Identidades para desenvolver $(a \pm b)^2$
Fáceis de usar se já temos expressão tipo $a^2 \pm 2ab + b^2$. Caso isso não ocorra, procure somar e subtrair parcela adequada. Por exemplo:
$a^2 + ab + b^2 = (a^2 + 2ab + b^2) - ab = (a+b)^2 - ab$.

Identidades para fatorar $a^2 \pm b^2$
Não podemos fatorar $a^2 + b^2$ (nos números reais).
Mas, é imensamente útil usar $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.

Identidades de terceiro grau
Pequena diferença com o segundo grau: além de termos identidades para $(a \pm b)^3$, agora temos fatoração tanto para $a^3 - b^3$ como para $a^3 + b^3$.
Usando as identidades de $(a \pm b)^3$, podemos deduzir facilmente as para $(a \pm b)^3$. Basta usar $(a \pm b)^3 = (a \pm b)\cdot(a \pm b)^2$.
Para as $a^3 \pm b^3$, que são mais difíceis de guardar, lembrar que $a^3 + b^3$ tem fator $(a+b)$ e $a^3 - b^3$ tem fator $(a-b)$, enquanto que o segundo fator é da forma $a^2 \pm ab + b^2$.

Problemas

Problema
Dados a, b, c três números reais não nulos cuja soma de seus recíprocos é nula, ou seja: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$, pede-se mostrar que $ab + bc + ca = 0$. Em tal caso, concluir que $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

Problema
Descobrir uma maneira de calcular rapidamente o valor da soma: $1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \frac{16}{81}$.

Problema
Na resolução de um certo problema, obteve-se a fórmula $y = \frac{x^2-4}{x^2+4}$. Pede-se:

a). *mostrando que a fórmula pode ser reescrita como $y = 1 - \frac{8}{x^2+4}$, concluir que $y < 1$;*
b). *mostrando que a fórmula pode ser reescrita como $y = \frac{2x^2}{x^2+4} - 1$, concluir que $y \geqslant -1$;*
c). *justificar por que $y < 1$, e não $y \leqslant 1$; por que $y \geqslant -1$, e não $y > -1$?*

Problema
Mostrar que, para números a, b, c por determinar, vale: $\dfrac{(x-1)^3 - 8}{x-3} = ax^2 + bx + c$

Problema
Ada observou que $5^2 - 4^2 = 5 + 4$, $10^2 - 9^2 = 10 + 9$, $120^2 - 119^2 = 120 + 119$. Beto lhe disse que essas igualdades, na verdade, valem para quaisquer dois inteiros consecutivos. Pede-se escrever igualdade algébrica expressando o que Beto afirmou e provar que ela vale sempre.

Problema
a). *Calcule inteligentemente o valor das somas:* $123^2 - 122^2 - 121^2 + 120^2$, $45^2 - 44^2 - 43^2 + 42^2$, $97^2 - 96^2 - 95^2 + 94^2$;
b). *a partir dos resultados acima, deduza um padrão geral e prove sua veracidade.*

Problema
Mostrar que $\dfrac{20092008^2}{20092007^2 + 20092009^2 - 2} = \dfrac{1}{2}$

Problema
Mostrar que $\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{15} + \dfrac{1}{35} + \dfrac{1}{63} + \dfrac{1}{99} + \dfrac{1}{143} + \dfrac{1}{195} + \dfrac{1}{255} + \dfrac{1}{323} + \dfrac{1}{399} + \dfrac{1}{483} = \dfrac{11}{23}$.
Dica: use $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \cdots$.

Problema (alunos nível 2 ou 3)
Calcular o valor do produto $p = (2+1)(2^2+1)(2^{2^2}+1)(2^{2^3}+1)(2^{2^4}+1)(2^{2^5}+1)$.
Dica: repetidamente, use a identidade $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$. Para fazer aparecer fatores tipo $(a-b)$ pense em iniciar calculando $(2-1)p$.