Números irracionais: breve revisão conceitual

O estudo sistemático dos números reais inicia no Ensino Fundamental e só termina na Universidade. Esse estudo é difícil de ser feito com rigor e coerência, além de ser complexo, pois precisa tratar de vários tipos de números. Assim, aqui teremos tempo apenas para enfatizar alguns pontos básicos.

A importância dos números reais, tanto em Matemática como nas ciências, reside em sua capacidade de medir as grandezas contínuas. Por *grandeza* entendemos tudo o que pode aumentar ou diminuir. Existem dois tipos básicos de grandezas: as discretas e as contínuas. Exemplos de *grandezas discretas* são a quantidade de ovos numa cesta, a dos alunos numa sala de aula, etc., enquanto que são exemplos de *grandezas contínuas* um comprimento, uma área, uma massa, a quantidade de gasolina no tanque de um automóvel, os vários tipos de forças que se estuda em Física, etc.

As grandezas contínuas são medidas e as discretas contadas.

✔ Redução da medida das grandezas contínuas à medida de segmentos de reta:
A medição das grandezas contínuas equivale à medição dos segmentos de reta. Ou seja, a medida de toda grandeza continua se reduz à medida de um segmento de reta; reciprocamente, toda medida de segmento de reta corresponde à medida de uma grandeza contínua.

✔ Como se faz a medida dos segmentos de reta?
Medir um segmento de reta dado consiste em, uma vez fixado arbitrariamente um segmento de reta que será denominado unidade (ou segmento unitário), dizer quantas vezes o segmento unitário (ou uma sua fração) está contido no segmento dado. Esse quantas vezes será expresso precisamente por meio de um número real. Em verdade, como temos de tratar de números positivos e negativos, os números reais são os números que expressam a medida dos segmentos de uma reta <u>orientada</u> ou eixo.

✔ O que é uma reta orientada ou eixo?
é qualquer reta na qual foram escolhidos um ponto O que será denominado *origem da reta* e um segmento OU (onde U é um ponto na reta distinto de O) que servirá como *unidade de medida*. Este segmento OU também determina a *orientação positiva* da reta: a determinada pelo sentido de percurso que vai de O para U; o sentido oposto (o que vai de U para O) é denominado *orientação negativa* da reta.

✔ O resultado da medida de um segmento de reta OP de uma reta orientada
Para exemplificar, iremos imaginar/desenhar tal reta na posição horizontal e o ponto U à direita de O, de modo que a orientação positiva é a que vai da esquerda para a direita.

- se P = O, dizemos que a medida de OP é o número **zero**;
- se P = U, dizemos que a medida de OP é o número **um**;
- se P estiver à direita de O, sua medida é um número **real positivo**;
- se P estiver à esquerda de O, sua medida é um número **real negativo**.

✔ Categorias de números reais
Para cada segmento OP medido, ocorre exatamente uma das seguintes possibilidades:

- ou OP é *comensurável* com a unidade, isso significando que OP é igual a um número inteiro de cópias de OU ou de cópias de alguma fração de OU. Denominamos **números racionais** os números que expressam a medida desse tipo de segmentos.
- ou OP é *incomensurável* com a unidade, isso significando que por menor que seja a fração de OU que tomemos, nunca suas cópias reproduzirão *exatamente* OP, tudo o que podemos fazer é reproduzí-lo *aproximadamente*. Denominamos **números irracionais** os números que expressam a medida desse tipo de segmentos.

✔ Representação decimal dos números reais
Todo número real tem ao menos uma representação decimal (representação com vírgula). Além disso:

- cada número irracional tem exatamente uma representação com vírgula e ela consiste de uma dízima **infinita e não periódica.** Reciprocamente, toda dízima **infinita não periódica** que pudermos imaginar obrigatoriamente representa algum número irracional.
- Se um número racional *for número decimal* (inteiro ou fracionário), ele tem exatamente duas representações com vírgula: uma com dízima finita e a outra com dízima infinita 9-terminante.
  Se um número racional *não for número decimal*, ele tem apenas uma representação com vírgula, e a dízima desta representação é periódica.

Existe uma quantidade infinita de números irracionais

Por exemplo, $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$, etc., ou seja: as raízes quadradas de números primos são números irracionais. Outros exemplos comuns de encontrarmos em problemas olímpicos são o número π (a razão entre circunferência e diâmetro de círculos) e a constante de Euler (ou base dos logarítmos naturais) $e = 2,718281828459045235360287471352662497757\ldots$

Exercício

"Toda representação decimal de um número racional ou é finita, ou é infinita com uma lógica simples: é periódica, ao menos a partir de uma certa casa decimal. Por outro lado, os números irracionais sempre têm uma representação por vírgula que não pode ser completamente descrita; por exemplo, ninguém sabe quem é o dígito na bilionésima casa decimal de $\sqrt{2}$*."*

Pede-se explicar o que há de errado nessa afirmação.

Exercício

Aponte ao menos um erro em cada frase a seguir.

- *a). Números irracionais são os números que não são números racionais.*
- *b). Números irracionais são os números que não podem ser escritos como o quociente de números inteiros.*

Exercício

Aponte ao menos um erro em cada frase a seguir.

- *a). Números decimais são os números reais que podem ser representados por uma fração cujo numerador é um inteiro e o denominador é uma potência de 10.*
- *b). Números decimais são os números reais que podem ser representados por uma fração.*
- *c). Denomina-se fração decimal ou número decimal a toda fração cujo denominador é potência de 10.*
- *d). Denomina-se fração decimal ou número decimal a toda fração ordinária cujo denominador é potência positiva de 10.*
- *e). Podemos dividir os números racionais em dois tipos disjuntos: os racionais inteiros (são os representados por números inteiros) e os racionais fracionários (são os representados por uma fração ordinária de denominador distinto de 1).*

Exercício

Sejam os números racionais representados pelas frações 29/55 e 39/75.

- *a). Esses dois números são números decimais?*
- *b). Achar um número decimal estritamente entre esses dois números.*
- *c). Achar um número racional que não seja decimal e que esteja estritamente entre esses dois números. (DICA: um caminho seria pensar na média aritmética, mas isso envolve mostrar que esta média não será número decimal.)*
- *d. Achar um número irracional que não seja decimal e que esteja estritamente entre esses dois números. (DICA: agora, a média não serve. Alternativa: use representações decimal.)*

Exercício

- *a). É possível encaixar infinitos números decimais entre 0,4 e 0,5 ? Se for possível, construa; se não for, justifique.*
- *b). Existe um número decimal estritamente entre 0 e 1 e que esteja o mais próximo possível de 1?*
- *c). Por que não pode existir nenhum número real entre 1 e 0,9999... ?*