Geometria Analítica Olímpica

Há mais de 2000 anos se estuda lugares geométricos por meio de relações entre as coordenadas de seus pontos. Entre 1600 e 1630, M. Ghetaldi, P. Fermat e R. Descartes muito aumentaram o poder desse método introduzindo a ideia de usar equações como tais relações. Isso, e o desenvolvimento da álgebra moderna, permitiu que (entre 1750 e 1800, com os livros de du Gua Malves, Cramer e principalmente G. Monge) a Geometria Analítica fosse sistematizada até a forma hoje ensinada na Escola Básica.

Noções essenciais da Geometria Analítica Plana

Definição
Por *lugar geométrico* do plano euclidiano entende-se o conjunto de todos os pontos desse plano que satisfazem uma propriedade em comum. Exemplo: o conjunto dos pontos equidistantes de um ponto dado.

Teorema Fundamental da Geometria Analítica
Existe uma correspondência biunívoca entre os pontos do plano euclidiano e o conjunto $\mathbb{R}^2$ *dos pares ordenados de números reais.*
A maneira mais comum usada pela GA para estabelecer essa correspondência é por meio de um *sistema cartesiano de eixos* (= dois eixos ortogonais, de mesma origem e com mesma unidade de medida), o que dá: pontos $\longleftrightarrow$ pares de coordenadas, e então: lugar geométrico $\longleftrightarrow$ uma ou mais equações, ou inequações.
Note que esses pares são ordenados, ou seja: $(2,5)$ e $(5,2)$ são pares distintos, logo correspondem a pontos diferentes. A primeira coordenada é a *abscissa* e a segunda é a *ordenada* do ponto.

O método da Geometria Analítica
consiste em usar álgebra para representar (equacionar), simplificar e resolver problemas geométricos.

Problemas básicos da Geometria Analítica
Problema do equacionamento: usando coordenadas, "traduzir" algebricamente as propriedades que definem o lugar geométrico em estudo. O resultado será uma ou mais equações, ou inequações, representando o lugar.

A análise algébrica do lugar geométrico: trabalhando com as equações ou inequações representando o lugar, descobrir propriedades geométricas matematicamente interessantes dele e sintetizá-las por meio de um gráfico (desenho).

Exercícios preliminares

Exercício (equacionamento)
Obter equação ou inequação do lugar geométrico que consiste
a). *dos pontos* $(0,1)$ e $(1,2)$;
b). *das bissetrizes dos quatro quadrantes do sistema de eixos;*
c). *dos pontos cuja abscissa é menor do que sua ordenada;*
d). *dos pontos exteriores ao círculo unitário centrado no ponto* $(2,1)$.

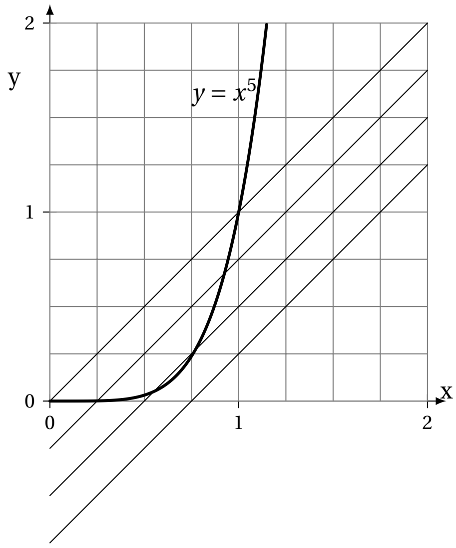
Exercício (gráfico/síntese)
Desenhar o gráfico cartesiano do lugar geométrico definido por cada equação ou inequação a seguir:
a). $y = x + \frac{x}{|x|}$ b). $y = x + |x|$ c). $|y| = 1 - |x|$ d). $x^2 + y^2 = 2|y|$ e). $(x^2 + y^2)^2 = 4x^2$ f). $y \leqslant 1 + x$.

Exercício (discussão)
À medida que o parâmetro λ *variar entre os números reais positivos, discutir o que ocorre com o gráfico do lugar geométrico definido por* $(x^2 + y^2 - \lambda)(|x| + |y| - 1) = 0$,

Problemas olímpicos

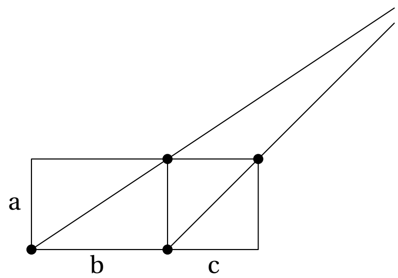
Problema 1
A partir de qualquer par de retas paralelas do plano, ache outras duas retas tais que as intersecções das quatro determinem um quadrado.
Sugestão: inicie estudando casos simples de pares, tais como $x = 1$ e $x = 2$, ou $y = 1$ e $y = 2$, ou $y = x$ e $y = x + 1$.

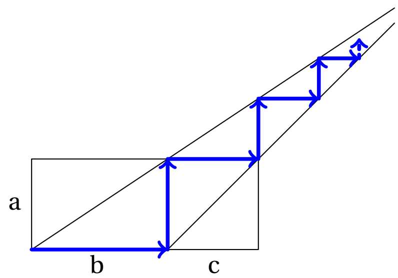
Problema 2
Considere a equação quíntica (ou seja, do quinto grau): $x^5 - x + \lambda = 0$, onde λ é um parâmetro real cujo domínio é o intervalo $0 \leqslant \lambda \leqslant 2$. Pede-se discutir o que ocorre com a quantidade de raízes *reais* (negativas, nulas ou positivas) dessa equação ao λ variar. Para tal, usar os gráficos cartesianos abaixo e o que pode-se deduzir deles por simetria em relação aos eixos coordenados, ou por prolongamento.



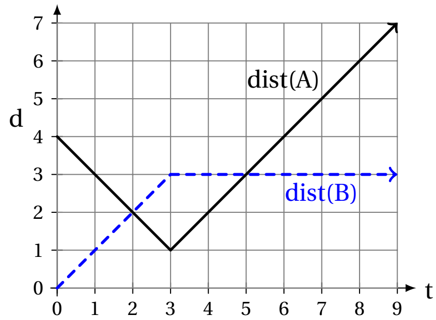
Problema 3
Na primeira figura abaixo, a partir do retângulo de lados a por $b+c$, construímos as duas retas desenhadas. A partir delas, construímos a escada com um número infinito de degraus de alturas h_1, h_2, h_3, etc., esquematizada na segunda figura.

1). Caracterizar, em termos dos possíveis valores positivos de a, b, c, os casos em que a escada tem altura total finita ou infinita. Em cada desses casos, o que ocorre com o tamanho dos sucessivos degraus?
2). Quando a escada tiver altura total finita, expresse esta altura em termos de a, b, c.





Problema 4
Fixemos dois pontos, A e B, do plano euclidiano. Ao lado, o gráfico em linha cheia registra como variou a distância até o ponto A de uma formiga que estava passeando no plano entre os instantes $t = 0$ e $t = 9$; enquanto que o gráfico em linha tracejada registra a distância dela até o ponto B.



a). Qual a distância entre os dois pontos fixos?
b). Em que instantes a formiga estava à mesma distância de A e B?
c). Em certo período de tempo, a formiga ficou andando sobre a reta entre A e B. Quando foi isso?
d). Desenhe o trajeto da formiga e calcule seu comprimento.
e). Se a formiga continuar caminhando até $t = 12$, poderia seu passeio ser representado simplesmente prolongando os dois gráficos originais? Explique-se.
f). Calcule o comprimento do trajeto da formiga entre $t = 0$ e $t = T$, quando $4 < T < 9$.