Equações numéricas em Olímpiadas

As equações numéricas podem ser resolvidas por métodos geométricos, numéricos e simbólicos (= algébricos e analíticos). Aqui, estudaremos apenas estes últimos. Evariste Galois c. 1830 desenvolveu uma teoria (hoje denominada Teoria de Galois) capaz de decidir se uma *equação polinomial* qualquer dada pode ser resolvida algébricamente, ou não. Contudo, para equações *não polinomiais* não existe nenhuma teoria análoga, de modo que precisamos estudá-las caso a caso. Mas, desde 2010 a companhia Wolfram Research (produz o software `Mathematica`) desenvolve algoritmo capaz de resolver simbólicamente uma grande variedade de equações não polinomiais, tais como grandes famílias de equações radicais e até transcendentes.

Resolução de equações numéricas quaisquer

1). Equação numérica

é toda equação cujas incógnitas são variáveis numéricas.

Quando as únicas operações definindo a equação forem algébricas (operações aritméticas e de radiciação) e elas ocorrerem um número finito de vezes temos uma *equação algébrica*. Caso contrário, temos uma *equação transcendente*. Os exemplos mais comuns de equações algébricas são as equações polinomiais e racionais, enquanto que equações trigonométricas e logarítmicas são exemplos comuns de equações transcendentes. Em olimpíadas também encontramos equações cujas incógnitas são matrizes, funções, etc.

2). Conjuntos associados a um problema envolvendo equação numérica

– O universo dos números

a considerar em um problema olímpico depende do nível. Nos níveis 1 e 2 o universo numérico é o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais; no nível 3 o universo é o conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos.

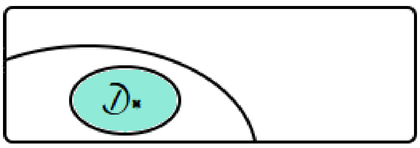
– O domínio da equação original do problema

é o conjunto dos números que a incógnita pode assumir de modo a ficar atribuído sentido numérico aos dois membros da equação e, *além disso*, também haver sentido no contexto do problema (por ex., comprimentos e áreas têm de ser positivos). Ele será denotado por $\mathscr{D}$. Todas as raízes do problema têm de estar em $\mathscr{D}$.

3). O método analítico de resolução de equações numéricas

Idealmente, consiste em transformar a equação original do problema em uma outra mais fácil de resolver e que tenha as mesmas raízes (dizemos que essas equações são *equivalentes*). Isso significa que ao passarmos da equação original para a fácil precisamos garantir que não perdemos raízes e nem ganhamos raízes falsas (= estranhas à original). Assim, denotando por $F(x) = 0$ a equação original e por $F'(x) = 0$ a fácil, devemos garantir que $\big(F(x) = 0 \text{ em } \mathscr{D}\big) \iff \big(F'(x) = 0 \text{ em } \mathscr{D}\big)$.

4). O ideal versus o real na resolução das equações



A transformação da equação original para outra mais fácil nem sempre é possível de se fazer inteiramente no domínio da original e, bem entendido, de modo a garantir a *equivalência* das duas (= não perder raízes e nem ganhar raízes estranhas ao problema). Em geral, conseguiremos fazer a transformação *apenas em parte* do domínio $\mathscr{D}$ da equação original. Essa parte é o **domínio de transformação equivalente** e será denotada por $\mathscr{D}_*$.

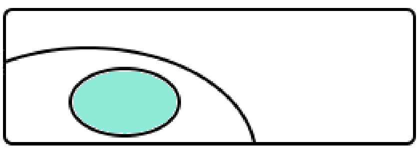
5). Consequência: a resolução analítica de uma equação numérica tem duas etapas

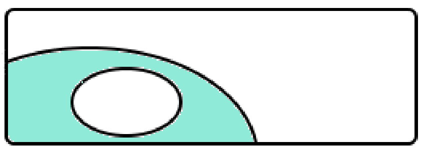
Para determinarmos as raízes da equação original do problema, primeiro calculamos as raízes em $\mathscr{D}_*$ da equação simplificada ou fácil, e depois verificamos se a equação original tem alguma raiz em $\mathscr{D}\backslash\mathscr{D}_*$.
Com efeito, como $\big(F(x) = 0 \text{ em } \mathscr{D}_*\big) \iff \big(F'(x) = 0 \text{ em } \mathscr{D}_*\big)$, podemos garantir que:

Raízes(em $\mathscr{D}$ da eq. original) = **Raízes**(em $\mathscr{D}_*$ da eq. simplificada) $\cup$ **Raízes**(em $\mathscr{D}\backslash\mathscr{D}_*$ da eq. original).

No caso particular, e bastante comum, em que $\mathscr{D} = \mathscr{D}_*$, o trabalho tem somente uma etapa:

Raízes(em $\mathscr{D}$ da eq. original) = **Raízes**(em $\mathscr{D}$ da eq. simplificada).





Primeira etapa

calculo as raízes que a equação **simplificada** tem em $\mathscr{D}_*$, e *apenas* em $\mathscr{D}_*$.

Segunda etapa

verifico diretamente se a equação **original** do problema tem alguma raiz em $\mathscr{D}\backslash\mathscr{D}_*$.

Exemplo modelo

Seja resolver a equação $(x-1)(2x+3)=(x-6)(x-1)$.

O domínio desta equação é $\mathscr{D}=\mathbb{R}$, mas podemos simplificar o fator comum $(x-1)$ apenas para $x\neq 1$, de modo que $\mathscr{D}_*$ é o subconjunto de $\mathscr{D}$ formado pelos $x\neq 1$. Podemos, então, escrever:

– para $x\neq 1$: $(x-1)(2x+3)=(x-6)(x-1) \iff 2x+3=x-6 \iff x=-9$,

– para $x=1$: verificamos diretamente na equação original que $0\cdot(2x+3)=0=(x-6)\cdot 0$.

Conclusão, as raízes da equação original ou dada são: $x=-9$ e $x=1$.

6). Quantidade de raízes de uma equação numérica

Existem equações sem nenhuma raiz (= *equações impossíveis*); equações que realmente têm raízes, mas em número finito; equações com um número infinito de raízes, mas que não constituem todo o domínio da equação (= *equações indeterminadas*); e equações cujas raízes são todos os elementos de seu domínio (= *identidades no domínio da equação*).

Exercícios preliminares

Exercício

Corrija a seguinte regra de cursinhos vestibulares: "Transforme a equação dada em uma mais fácil e calcule as raízes desta. Sua resposta será as raízes calculadas que verificarem a equação dada originalmente".

Dica: use o exemplo modelo acima.

Exercício

Os "raciocínios" a seguir são comuns entre alunos. Mostre que suas conclusões são falsas e, então, corrija-os.

a). Cancelando a parcela comum aos dois membros da equação $3x+\frac{1}{x-2}=6+\frac{1}{x-2}$, obtemos $3x=6$, logo $x=2$.

b). Multiplicando por x ambos os membros da equação $\frac{(x-1)(x+1)}{x}=2-\frac{1}{x}$, ela se transforma em $x^2-1=2x-1$, logo $x^2=2x$, de modo que as raízes da equação dada são $x=2$ e $x=0$.

c). Usando a identidade notável para o quadrado da soma, temos $4x^2-4x+1=2x-1 \iff (2x-1)^2=2x-1$ (para todos os x reais). Cancelando o fator comum $2x-1$, obtemos $2x-1=1$ logo $x=1$.

d). Para resolver $25x^2-10x+1=5x-1$, a Wikipedia transformou a equação em $(5x-1)^2=5x-1$, e daí para $5x-1=1$, de onde concluiu que a solução da equação original é $x=2/5$.

Exercício

Existem três tipos possíveis de resolução incorreta de equações numéricas: cálculo perdendo raízes, cálculo produzindo raízes estranhas (= falsas) e cálculo que tanto perde raízes como produz raízes estranhas. Enquadre cada exemplo de resolução do exercício anterior na correspondente categoria.

Exercício

Classifique cada equação a seguir quanto ao número de raízes reais em seu domínio.

$2(1+3x)-3(1+2x)=x+4(x-1)-(4x+3)$, $\quad \frac{2}{x}(x+\frac{1}{2})=\frac{5x+1-3x}{x}$, $\quad \frac{1}{3}(2x-1)=\frac{1}{6}(x-5)+\frac{1}{2}(x+3)$.

Exercício

Determinar todas as raízes reais de cada equação algébrica abaixo.

a). $(x-1)(2x+3)=(x-6)(x-1)$

b). $(x-1)(x-2)(x-3)^2=(x-3)(x-2)(x-1)$

c). $(5x+2)^2=(x+1)^2$ (Dica: $a^2-b^2=$ etc.)

d). *Sem usar Bhaskara:* $(x-3)^2=16$

Tipos de equações numéricas

Quanto ao tipo de operações matemáticas envolvidas numa equação, essas se dividem em:

– equações polinomiais

– equações racionais (envolvem somente as quatro operações aritméticas)

– equações radicais ou irracionais (envolvem as quatro operações aritméticas mais radiciações; ver abaixo)

– equações transcendentes (envolvem operações não algébricas, como trigonométricas, logarítmicas ou etc.)

Dedicaremos a próxima lição às racionais e radicais, depois trataremos com mais detalhes as polinomiais.

Revisão

Exercício

a). Quantas podem ser as raízes de uma equação numérica?

b). Quais os tipos de possíveis conclusões errôneas na resolução de equações?

Problema

Discutir o que ocorre com as raízes de $ax=b$, à medida que a e b assumirem quaisquer valores, inclusive zero.

Problema

Determinar cinco números inteiros consecutivos cuja soma vale 405.

Problema

A equação transcendente de Kepler: $x=M+\epsilon \operatorname{sen} x$, onde $0\leqslant x, M<2\pi$, surge no cálculo da posição de um corpo celeste em órbita elíptica de excentricidade $0\leqslant\epsilon<1$. Via Geometria Analítica, mostre que cada M determina exatamente uma raiz x.