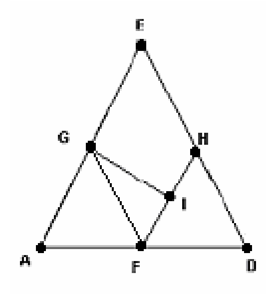
1ª questão: Geometria.

Determine:

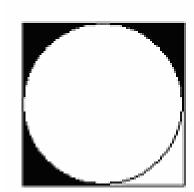
a) Na figura ao lado o triângulo AED é eqüilátero, sendo F, G, H os pontos médios, respectivamente, dos lados AD, AE, DE. O segmento GI pertence à bissetriz do ângulo FGH.



i) Mostre que o segmento GI é perpendicular ao segmento FH. (6 pontos)

ii) Sabendo que a área do triângulo AED mede 40 cm^2, calcule a área do triângulo GIF. (6 pontos)

b) Na figura abaixo um círculo é inscrito em um quadrado de lado 8. Calcule a área em negrito da figura. Use $\pi \approx 3{,}14$. (8 pontos)



Resolução:

a)

Utilizamos a seguinte notação:

ΔABC= triângulo com vértices em A, B e C.

A(Δ ABC)=área do triângulo com vértices em A,B e C.

i) Considerando que a soma dos ângulos internos de um triângulo vale 180º e que o ΔADE eqüilátero temos $\hat{A} = \hat{D} = \hat{E}$ =60º

O Δ GEH é eqüilátero, pois $\hat{E} = 60º$ e os lados GE e HE iguais por construção, logo os ângulos E$\hat{G}$H e E$\hat{H}$G são iguais e medem cada um 60° .

Analogamente Δ AGF E Δ FHD são eqüiláteros e congruentes a Δ EGH .

Consequentemente Δ GHF tem os três lados iguais, logo é eqüilátero.

Como GI é bissetriz do ângulo F$\hat{G}$H o ângulo F$\hat{G}$I é igual ao H$\hat{G}$I e medem 30°cada.

Δ GFI é retângulo em I pois G$\hat{H}$F=60º e F$\hat{G}$I=30º, justificando a perpendicularidade dos segmentos GI e FH.

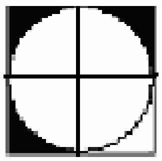
ii) Considerando o realizado no item anterior temos que:

Δ AFG $\equiv$ Δ DFH $\equiv$ Δ EGH $\equiv$ Δ FGH (eqüiláteros) , o Δ GIF $\equiv$ Δ GIH e

A (Δ GIF) = A($\Delta \dfrac{GFH}{2}$)

Assim A(Δ GIF)= $\dfrac{40}{4} \cdot \dfrac{1}{2}$ =5cm^2 .

b) Dividindo-se o quadrado original em quatro quadrados de mesma área (de lado 4), podemos calcular 1/3 da região em negrito, pela diferença da área do quadrado menos a área de um quarto de círculo conforme a figura.



Sabe-se que $\frac{1}{4}$ da área do Círculo vale $\frac{\pi r^2}{4}$, consequentemente a parte em negrito relativa a esse quadrado vale: 16- $\frac{\pi 16}{4}$ = 16-4π = 4(4-π).

Assim a área total em negrito vale 3[4(4-π)] = 12(4-π).

Considerando π=3,14 temos 12(4-3,14) =12(0,86) = 10,32.

2ª Questão: Inteiros, Racionais e Porcentagem.

165 estudantes participam do Chat: ORM sabendo que $\frac{3}{5}$ dos participantes são alunos da escola MATPITAGORAS e $\frac{1}{3}$ desta mesma escola que participa do Chat são meninos:

a) Quantas meninas da escola MATPITAGORAS participam do Chat? (6 pontos)
b) Qual a porcentagem dos alunos da escola MATPITAGORAS em relação a todos participantes do Chat? (6 pontos)
c) O número que representa a quantidade de participantes do Chat ORM que tem 16 anos é múltiplo de 4 e 7 simultaneamente e é divisível pelos seus algarismos. Quantos alunos têm 16 anos? (8 pontos)

Resolução:

165 participantes do Chat ORM

$\frac{3}{5}$ são alunos da escola MATPITAGORAS, isto é $\frac{3}{5}$.165 = 99 alunos.

$\frac{1}{3}$ desta mesma escola que participa do Chat são meninos, isto é $\frac{1}{3}$.99 = 33 meninos.

Meninas no Chat: $\frac{2}{3}$.99 = 66 meninas.

a) Meninas no Chat: $\frac{2}{3}$.99 = 66 meninas.

b) $\frac{3}{5} = \frac{x}{100}$, x=60 logo 60%

c) Múltiplos de 4 e 7 simultaneamente são múltiplos de 28
28-não é divisível por 8
56-não é divisível por 5 nem por 6
84- não é divisível por 8
112- é divisível por 1 e por 2
140-não é divisível por 0
Assim temos 112 participantes no Chat ORM com 16 anos.

3ª Questão: Congruência.

a) Qual é o resto da divisão de $3^{25}+4$ por 7? (10 pontos)
b) Qual o número mais próximo e maior que $3^{25}+4$ que deixa resto 2 na divisão por 7?(10 pontos)

Obs.: A resposta pode ser na forma com expoente.

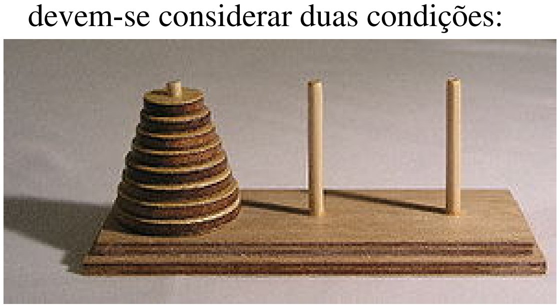
Resolução:

a)
Temos que
$3^{25}+4=(3^2)^{12}.3+4=9^{12}.3+4$
Sendo
$9^{12}.3+4 \equiv 2^{12}.3+4 \equiv (2^3)^4.3+4 \equiv 8^4.3+4 \equiv 1^4.3+4 \equiv 7 \equiv 0 \bmod 7.$
Assim 7 divide $3^{25}+4$.

b)
Considerando o resultado do item anterior temos como resposta $3^{25}+6$, pois
$(3^{25}+4)+2 \equiv 2 \bmod 7$

4ª Questão: Torre de Hanói.

Na figura abaixo temos três pinos sendo que no primeiro pino são colocados discos de diâmetro crescente de cima para baixo. O jogo consiste em transferir os discos que formam a torre, para um dos pinos vazios, no menor número de movimentos possíveis. Porém devem-se considerar duas condições:



1) deve-se movimentar um único disco por vez;
2) não pode colocar um disco de maior diâmetro sobre um de menor diâmetro.

a) Qual o menor número de movimentos necessários para transferir uma torre de três discos para um dos pinos vazios? (4 pontos)

b) Qual o menor número de movimentos necessários para transferir uma torre de quatro discos para um dos pinos vazios? (6 pontos)

c) Para transferir uma torre de n discos, o número mínimo de movimentos realizados foram 255. Qual será o menor números necessários de movimentos necessários para transferir uma torre de n+1 discos? (10 pontos)

Resolução:

Observação:

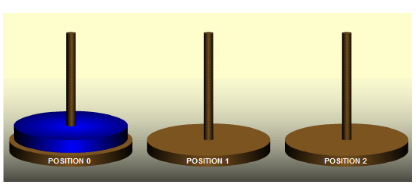
Nos itens a, b e c se suprimirmos a palavra "necessários" ou substituí-la por "suficientes" temos o que realmente gostaríamos de perguntar. Pelas respostas apresentadas verificamos que ela não atrapalhou o entendimento da questão, pois os alunos a consideraram como se fosse "suficientes". A solução que apresentaremos leva em conta essas considerações.

Utilizaremos a seguinte notação: D1, D2, D3...DN os discos da torre em tamanho decrescente; P1, P2, P3, o primeiro segundo e terceiro pino, assim D2P1 significa segundo disco no primeiro pino.

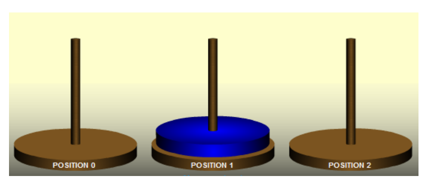
Indicaremos por n o número de discos, por Mn o menor número de movimentos para transferir uma Torre de n discos. Utilizaremos a seguinte notação: D1, D2, D3...DN os discos da torre em tamanho decrescente; P1, P2 e P3, o primeiro, segundo e terceiro pino. Assim D2P1 significa segundo disco no primeiro pino.

A seguir apresentaremos a resolução do problema Torre de Hanói.

Para n=1, temos os seguintes movimentos:



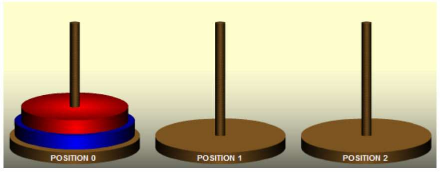
Posição inicial : D1 P1



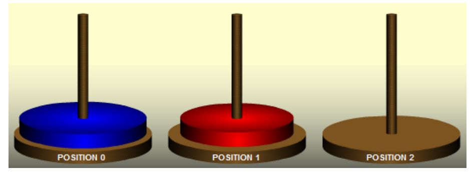
Primeiro Movimento : D1 P2
(Posição final).

M1 = 1

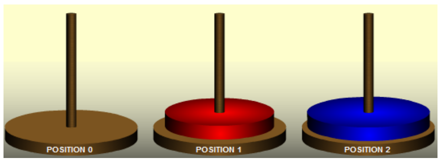
Para n=2, temos os seguintes movimentos:



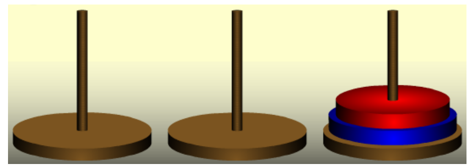
Posição inicial : D1 P1, D2 P1



Primeiro movimento : D1 P2, D2 P1

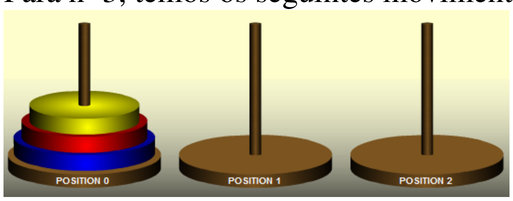


Segundo movimento: D1 P2, D2 P3

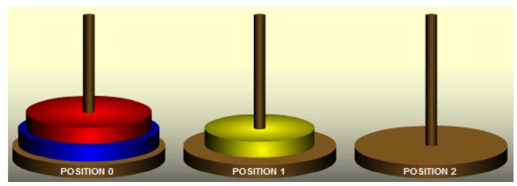

Terceiro movimento: D1 P3, D2 P3 (posição final).

M2 = 3 =2*1+1

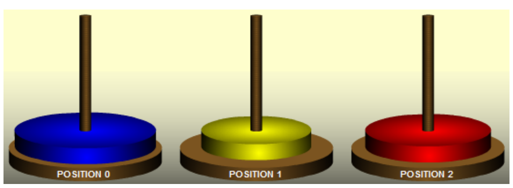
Para n=3, temos os seguintes movimentos:



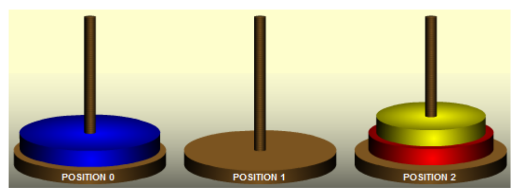
Posição inicial: D1P1, D2P1, D3P1.



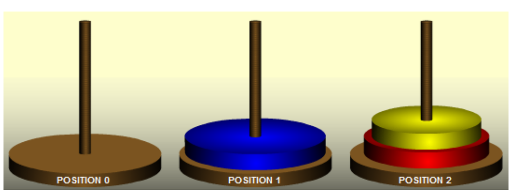
Primeiro movimento:D1P2, D2P1,D3P1.



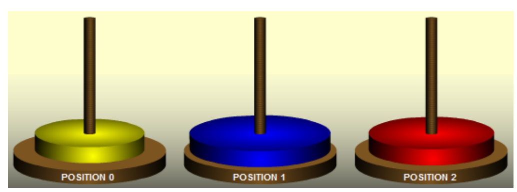
Segundo movimento: D1P2,D2P3,D3P1.



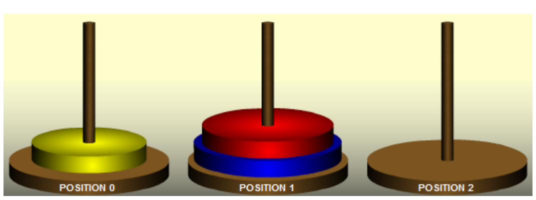
Terceiro movimento:D1P3, D2P3, D3P1.



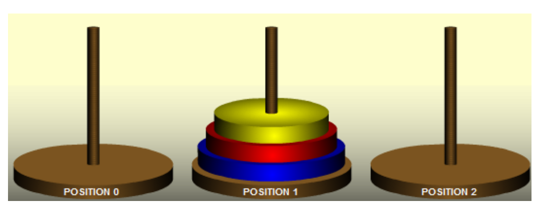
Quarto movimento: D1P3, D2P3,D3P2.



Quinto movimento: D1P1,D2P3, D3P2.



Sexto movimento: D1P1, D2P2, D3P2.



Sétimo movimento: D1P2, D2P2, D3P2 (posição final)

M3=7=2*3+1

Note que esta sequência de movimentos pode ser dividida em três etapas.
A primeira etapa corresponde aos três primeiros movimentos que correspondem aos utilizados na situação n=2 anterior. Na segunda etapa temos o quarto movimento que transporta o disco maior da torre para a posição onde se formará a nova torre. Na terceira etapa ocorre uma sequência de movimentos semelhantes a da situação n=2.

Assim se justifica o porquê da colocação 7=1+2*3, isto é, M3 = 1+2*M2. Temos também que M2, por construção, é uma sequência de menor número de movimentos para transferir uma torre de 2 discos conforme as regras do jogo, consequentemente M3 também o é. Generalizando empiricamente obtemos a seguinte relação recursiva M_{n+1} = 1+2*Mn. Ou seja: sabendo-se o número de movimentos Mn para transferir uma torre de n discos, o número de movimentos M_{n+1} para transferir uma torre de n+1 discos é obtido dobrando Mn e somando 1.
Resumindo: o item a) foi resolvido construtivamente, obtendo-se Mn=7; no item b) utiliza-se a relação recursiva temos M4=1+2*7=15.
Para o item c) como Mn=255, temos M_{n+1} = 1+2*255= 511.

5ª Questão: Racionais e Percentagem.

a) $\frac{2}{7}$ de $\frac{21}{10}$ de um ano equivale a quantos segundos?(10 pontos)

b) Qual a porcentagem que corresponde $\frac{2}{7}$ de $\frac{21}{10}$ de um ano?(10 pontos)

Resolução:

obs: mês de 30 dias

a) $\frac{2}{7}.\frac{21}{10}$ de uma ano é $\frac{6}{10}$ de um ano que é $\frac{6}{10}$.12.30.24.60.60 segundos = 18662400 segundos.

b) $\frac{2}{7}.\frac{21}{10}=\frac{6}{10}=\frac{60}{100}$=60%