Prova nível III da Olimpíada Regional de Matemática Grande PoA, 2010.

• PROBLEMA 1.–

Sempre que x, y, z e w forem quatro números inteiros não nulos, e tais que

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{w}=1\,,$$

mostre que ao menos um deles tem de ser par.

Resolução:

Reduzindo ao mesmo denominador, obtemos:

$$yzw+xzw+xyw+xyz=xyzw\,,$$

de modo que se, ao contrário do afirmado, todos os quatro inteiros dados fossem ímpares, a última igualdade expressaria a seguinte relação de paridade:
ímpar + ímpar + ímpar + ímpar = ímpar; ora, a soma de dois ímpares é sempre par, de modo que ficaríamos com: par + par = ímpar. Um absurdo!

• PROBLEMA 2.–

Achar todos os números primos da forma $4+n^4$, onde n é inteiro positivo.

Resolução:

Precisamos fatorar $4+n^4$. Para isso, observamos que $n^4+4=(n^2)^2+(2)^2$, de modo que as identidades clássicas $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ e $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$, usadas sucessivamente, nos permitem escrever:

$$n^4+4=(n^2)^2+(2)^2=(n^2+2)^2-(2n)^2=(n^2+2n+2)(n^2-2n+2)\,.$$

Vemos assim que, como $n^2+2n+2\geqslant 2$, a única possibilidade de um n dar n^4+4 primo é ocorrendo $n^2-2n+2=1$, ou seja $n^2-2n+1=0$. Ora, a única raiz inteira positiva dessa equação é $n=1$. Conclusão: só há um primo da forma n^4+4, ele é $1^4+4=5$.

• PROBLEMA 3.–

Achar o número inteiro que é o valor da soma:

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+99\cdot 100\,.$$

Resolução:

O valor, S, desse tipo de soma, normalmente, se consegue determinar transformando-a numa soma telescópica (ou seja, que envolva sucessivos cancelamentos). Com tal objetivo em mente, observamos que

$$n(n+1)(n+2)-(n-1)n(n+1)=3n(n+1)\,,$$

de modo que:

$$\begin{aligned}3S &= 3\Big[1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+99\cdot 100\Big]\\ &= (1\cdot 2\cdot 3-0\cdot 1\cdot 2)+(2\cdot 3\cdot 4-1\cdot 2\cdot 3)+(3\cdot 4\cdot 5-2\cdot 3\cdot 4)+\ldots+(99\cdot 100\cdot 101-98\cdot 99\cdot 10\\ &= 99\cdot 100\cdot 101 = 999\,900 \quad\therefore\quad S=333\,300\,.\end{aligned}$$

• PROBLEMA 4.–

Seja f a função dada por $f(x)=x^3+3x^2+3x$, para todos os valores reais de x. A partir dela e para cada número real a, construímos uma nova função g dada por $g(x)=f(x-a)$, também definida para todos os valores reais de x.
Pede-se: achar todos os valores de a para os quais temos $g(x)>0$, para todos os $x>0$.

Resolução:

Como $f(x)=(x+1)^3-1$, deduzimos:

$$f(x)>0 \iff (x+1)^3>1 \iff x+1>1 \iff x>0\,.$$

Disso, segue que $g(x)=f(x-a)>0 \iff x-a>0 \iff x>a$. De modo que (observe que passamos a usar quantificadores!):

$$g(x)>0 \quad (\forall x>0) \iff x>a \quad (\forall x>0)\,.$$

Ora, as possibilidades de sinal para a mostram que: $x>a$ $(\forall x>0)$ $\iff$ $a\leqslant 0$.
Conclusão: $g(x)>0 \quad (\forall x>0) \iff a\leqslant 0\,.$

• PROBLEMA 5.–

Provar que vale $n^3\leqslant 3^n$, para todos os n inteiros positivos.

Resolução:

A natureza da afirmação sugere uma prova por indução matemática, para $n=1,2,3,\ldots$.
Para descobrir tal prova, precisamos ver como o caso n "entra" no caso $n+1$. Ou seja: precisamos descobrir como relacionar $(n+1)^3$ com n^3; para isso, a igualdade dos expoentes dessas duas expressões nos leva a estudar $(n+1)^3/n^3$:

$$\begin{aligned}\frac{(n+1)^3}{n^3}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^3 &\leqslant \left(1+\frac{1}{1}\right)^3=8, \quad \forall n\geqslant 1\\ &\leqslant \left(1+\frac{1}{2}\right)^3=\frac{27}{8}\simeq 3,38, \quad \forall n\geqslant 2\\ &\leqslant \left(1+\frac{1}{3}\right)^3=\frac{64}{27}<3, \quad \forall n\geqslant 3\,.\end{aligned}$$

De modo que $(n+1)^3<3n^3$, sempre que $n\geqslant 3$. Podemos, assim, fazer o seguinte raciocínio indutivo para provar que $n^3\leqslant 3^n$, para $n\geqslant 3$ (note que não é para $n\geqslant 1\,!$):
Para $n=3$: $3^3=3^3$, e, se vale para $n\geqslant 3$, temos: $(n+1)^3<3n^3\leqslant 3\cdot 3^n=3^{n+1}$.
Resta observar que os casos $n=1$ e $n=2$ são triviais: $1^3\leqslant 3^1$ e $2^3\leqslant 3^2$.