ORM – Grande Porto Alegre/2011 – prova nivel 2

QUESTÃO 1. (Números inteiros e fatoração)

Determine, justificando o valor das expressões abaixo:
(8 pontos) a) $(-1) - (-1)^1 - (-1)^2 - (-1)^3 - \ldots - (-1)^{2011}$

(12 pontos) b) $(20092008)^2 / [(20092007)^2 + (20092009)^2 - 2]$

Resolução

a)
Observe que:
$T_1 = (-1) - (-1)^1 = 0$,
$T_2 = T_1 - (-1)^2 = -1$,
$T_3 = T_2 - (-1)^3 = 0$.
Assim, n = par => $T_n = 0$ e n=impar => $T_n = -1$.
A soma solicitada corresponde a n=2011, logo seu valor é $T_{2011} = 0$

b)
Usando que $a^2 - 1 = (a+1)(a-1)$, segue que $(20092007)^2 + (20092009)^2 - 2 = (20092007^2 - 1) + (20092009^2 - 1) = 20092008 \times 20092006 + 20092010 \times 20092008$, de modo que
$(20092008)^2 / [(20092007)^2 + (20092009)^2 - 2] =$
$(20092008)^2 / [20092008 \times 20092006 + 20092010 \times 20092008] =$
$20092008 / [20092006 + 20092010] =$

$20092008 / [(20092008 - 2) + (20092008 + 2)] = 20092008 / [20092008 + 20092008] = 1/2$

QUESTÃO 2 . (Congruência e divisibilidade)

(10 pontos) a) Sejam b e c números naturais não nulos tais que 1+b.c é divisível por 3, pergunta-se se b+c também é divisível por 3? Justifique.

(10 pontos) b) Um grupo de homens, algum deles acompanhados de suas esposas, gastou 1000 dólares em um hotel. Cada homem gastou 19 dólares e cada mulher 13 dólares. Determine quantas mulheres e quantos homens tinha o grupo?

Resolução

a) Cada número natural tem de estar exatamente em um dos três conjuntos abaixo, os quais podem ser caracterizados por meio de congruências módulo 3:

R0 = { 0, 3, 6, 9, … } = { $x \in$ N | $x \equiv 0$ mod 3 },
R1 = { 1, 4, 7, 10, …} = { $x \in$ N | $x \equiv 1$ mod 3 },
R2 = { 2, 5, 8, 11, …} = { $x \in$ N | $x \equiv 2$ mod 3 }.

Temos que 1+bc está em R0, logo bc está em R2 (propriedade da adição modular). Disso resulta que b+c está em R2, pois $1+2=3\equiv 0$ (mod 3).

b)

Cada casal gastou 13 dólares + 19 dólares = 32 dólares, assim a equação que carateriza este problema é: 32m+19n=1000, onde m é o número de homens casados e n o número de solteiros.

Note que 1000 e 32 são múltipos de 8, consequentemente n deve ser múltiplo de 8, pois 19 é primo. Temos ainda que 19n é menor ou igual a 1000, logo n é menor que 53. A tabela abaixo no permite obter os valores para n e m que satisfazem a equação que define o problema.

n	1000-19n	m=(1000-19n)/32
8	848	Não inteiro
16	696	Não inteiro
24	544	17
32	392	Não inteiro
40	240	Não inteiro
48	88	Não inteiro

Vemos então que n=24 e m=17 são os números naturais que satisfazem a equação que caracteriza o problema.
Solução: 24 mulheres e (24 +17=41) homens.

QUESTÃO 3 . (Números reais)

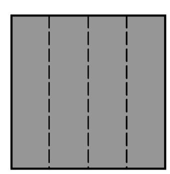
(20 pontos) Considere o número 0,112358314..., onde cada algarismo, a partir do terceiro, é obtido somando os dois algarismos anteriores a ele, ficando-se apenas com o algarismo das unidades e desprezando o das dezenas. Esse número é racional ou irracional? Justifique

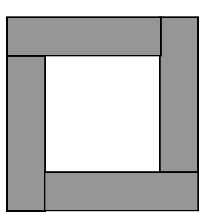
Resolução

Se continuarmos a gerar dígitos do número dado, obteremos:
0,1123583145943707741561785381909987527965167303369549325729101123583145
943707... .
Trata-se de um número racional, pois repete-se o par 11 e isto, pela lei de formação, faz que sejam gerados novamente todos os dígitos que o tinham seguido (2358...), e assim sucessivamente.
Poderíamos chegar a essa mesma conclusão considerando o conjunto de naturais {00,01,02,...,97,98,99}, o qual corresponde a todas as possibilidades que podemos formar com os algarismos{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9} tomados dois a dois. Como esse conjunto é finito, obrigatoriamente ocorre uma repetição de um destes pares de algarismos na geração do número considerado, como efetivamente ocorreu.

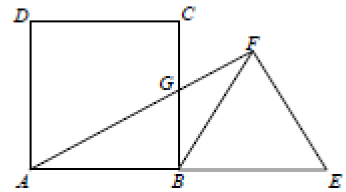
QUESTÃO 4 . (Geometria)

(8 pontos) a) Um quadrado de área 1 foi dividido em 4 retângulos congruentes, conforme indicado no desenho à esquerda. Em seguida, os quatro retângulos foram reagrupados de maneira a formar um quadrado, com um buraco quadrado no centro, conforme indica o desenho à direita. Determine a área do buraco.





b) A figura a seguir mostra um quadrado ABCD e um triângulo equilátero BEF, ambos com lado de medida 1cm . Os pontos A, B e E são colineares, assim como os pontos A, G e F.



Determine:

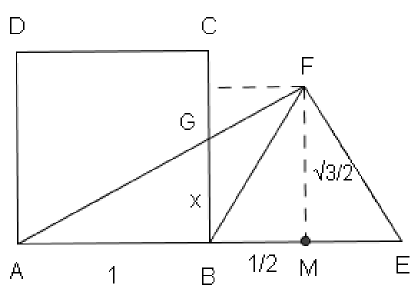
(6 pontos) - A área do triângulo BFG
(6 pontos) - A área do triângulo ABG

Resolução

a) Cada retângulo tem comprimento 1 e largura ¼; portanto, o buraco quadrado tem lado de medida igual a 1-1/4=3/4 e sua área é $(3/4)^2$= 9/16.

b) Na figura abaixo, temos FM=(√3)/2 pois corresponde a uma das alturas do triângulo equlátero BFE com lado igual a 1. Temos ainda os triângulos retângulos ABG e AMF semelhantes (Teorema de Tales), obtendo-se, então, a seguinte proporção:

x/1=[(√3)/2]/(3/2) => x=(√3)/3.



Na figura acima, temos FM=√3/2 pois corresponde a uma das alturas do triângulo equlátero BFE com lado igual a 1. Temos ainda os triângulos retângulos ABG e AMF semelhantes (teorema de tales), obtendo-se então a seguinte proporção:

x/1=(√3/2)/(3/2) => x=√3/3.

A área do BFG é então BGxBM/2=[(√3)/3x1/20]/2= (√3)/12.

A área do triângulo ABG é então $[1x(\sqrt{3})/3]/2=(\sqrt{3})/6$

QUESTÃO 5. (Percentagem) (20 pontos)

Durante sua viagem ao País das Maravilhas, a altura de Alice sofreu quatro mudanças sucessivas da seguinte forma. Inicialmente, ela tomou um gole de um líquido que estava numa garrafa em cujo rótulo se lia: "beba-me e fique 25% mais alta". A seguir, comeu um pedaço de uma torta onde estava escrito: "prove-me e fique 10% mais baixa". Logo após tomou um gole do líquido de outra garrafa cujo rótulo estampava a mensagem: "beba-me e fique 10% mais alta". Finalmente, comeu um pedaço de outra torta na qual estava escrito:"prove-me e fique 20% mais baixa". Após a viagem de Alice, ela ficou mais baixa? Ou mais alta? Dê o percentual dessa variação justificando sua resposta.

Resolução

Sendo h a altura inicial de Alice, sua altura final será 1,25x0,9x1,1x0,8 h = 0,99h. Ou seja, ela ficou 1% mais baixa