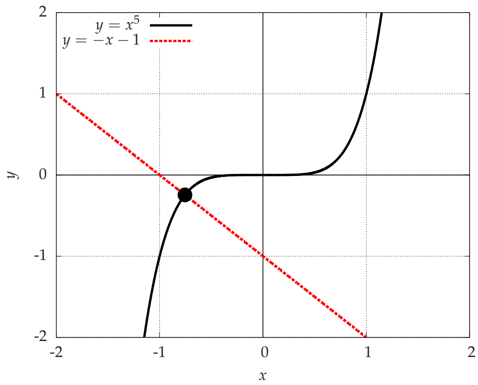
Prova nível III da Olimpíada Regional de Matemática Grande PoA, 2011.

PROBLEMA 1.

Provar que a equação $x^5+x+1=0$ tem exatamente uma raiz real e que esta é um número irracional.

Resolução:

Desenhando os conhecidos gráficos de $y=x^5$ e $y=-x-1$, vemos imediatamente que eles têm um único ponto de intersecção. Logo, a equação dada, ou seja $x^5=-x-1$, tem uma única raiz real.



Resta mostrar que essa raiz tem de ser um número irracional. Ora, as possíveis raízes racionais de uma equação polinomial de coeficientes inteiros, quando escritas na forma irredutível p/q, têm de ser tais que p divide o termo constante da equação (ou seja, no caso: p tem de dividir 1) e q divide o coeficiente do termo de maior grau (no caso da equação dada, este termo é x^5, logo q tem de dividir 1). Logo, temos de ter $p=\pm 1$ e $q=\pm$, e isso significa que a única possibilidade de essa equação ter raiz racional é com os valores $x=+1$ e $x=-1$. Como nenhum desses dois valores satisfaz a equação, concluímos que ela não tem nenhuma raiz racional.

Conclusão: a equação tem exatamente uma raiz real e ela não pode ser racional, logo a equação tem exatamente uma raiz real e ela é irracional.

PROBLEMA 2.

Expressar o valor da soma seguinte como uma fração irredutível:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{63}+\frac{1}{99}+\frac{1}{143}+\frac{1}{195}+\frac{1}{255}+\frac{1}{323}+\frac{1}{399}+\frac{1}{483}.$$

Resolução:

Observando que

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab},$$

podemos escrever:

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{63}+\frac{1}{99}+\frac{1}{143}+\frac{1}{195}+\frac{1}{255}+\frac{1}{323}+\frac{1}{399}+\frac{1}{483}\\
&= \frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{21\cdot 23}\\
&= \frac{1}{2}\Big[\frac{2}{1\cdot 3}+\frac{2}{3\cdot 5}+\frac{2}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{2}{21\cdot 23}\Big]\\
&= \frac{1}{2}\Big[(\frac{1}{1}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})+(\frac{1}{5}-\frac{1}{7})+\cdots+(\frac{1}{21}-\frac{1}{23})\Big]\\
&= \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{1}-\frac{1}{23}\Big]=\frac{22}{46}=\frac{11}{23}\,.
\end{aligned}$$

PROBLEMA 3 .

Dados números reais a_1, a_2, a_3, $\ldots$, a_n cujo produto vale $a_1a_2a_3\ldots a_n = 1$, mostrar que

$$(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)\cdots(1+a_n) \geqslant 2^n\,.$$

Resolução:

- Se não exigirmos que todos os $a_k > 0$, o resultado pode ser falso.

Quando $n = 2$, tomando $a_1 = a_2 = -1$, teremos: $(1+a_1)(1+a_2) = 0 \ngeqslant 2^2 = 4$. Quando $n \geqslant 3$, tomando novamente $a_1 = a_2 = -1$, e colocando $a_3 = \ldots = a_n = 1$, chegamos a $0 \ngeqslant 2^n$. (Nota: para $n = 1$, somos obrigados a ter $a_1 = 1$, de modo que o resultado trivialmente vale para $n = 1$).

- Se exigirmos que todos os a_k sejam positivos, o resultado sempre é verdadeiro.

Vejamos. Sendo $a > 0$, temos $(1-\sqrt{a})^2 \geqslant 0$, ou seja: $1 - 2\sqrt{a} + a \geqslant 0$, de modo que $1 + a \geqslant 2\sqrt{a}$. Essa conclusão também pode ser obtida da relação entre a média aritmática e geométrica de dois números positivos, a e b (no nosso caso, estamos interessados apenas em $b = 1$):

$$\frac{b+a}{2} \geqslant \sqrt{ba} \quad \therefore \quad 1+a \geqslant 2\sqrt{a}\,.$$

Resta aplicar a desigualdade sucessivamente, para a_1, a_2, etc.:

$$(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)\cdots(1+a_n) \geqslant 2\sqrt{a}_1\cdot 2\sqrt{a}_2\cdot 2\sqrt{a}_3\cdot\ldots\cdot 2\sqrt{a}_n = 2^n\cdot\sqrt{a_1a_2a_3\ldots a_n} = 2^n\,.$$

PROBLEMA 4 .

Mostrar que $1 + 2^{2n-1}$ sempre é divisível por 3, qualquer que seja o valor de $n \geqslant 1$.

Resolução:

Uma maneira de provar o que se afirma é por indução matemática simples.

Para $n = 1$, temos que $1 + 2^{2n-1} = 1 + 2 = 3$, trivialmente divisível por 3. Supondo que o resultado valha para $n \geqslant 1$, provemos terá de valer para $n + 1$. Ou seja, provemos que $1 + 2^{2n-1}$ divisível por 3 obriga que $1 + 2^{2n+1}$ também seja divisível por 3.

Para isso, precisamos ver como fazer aparecer $1 + 2^{2n-1}$ em $1 + 2^{2n+1}$. Ora,

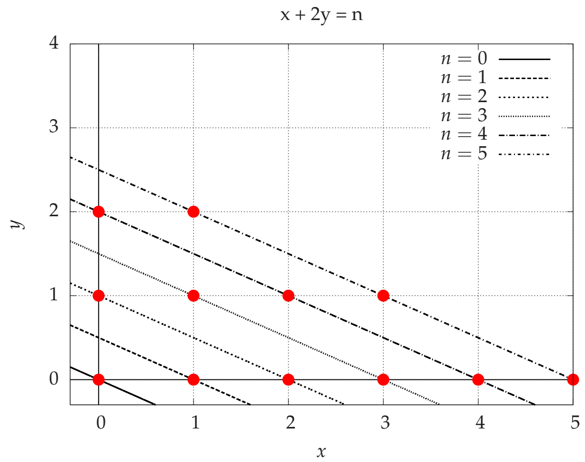
$$1 + 2^{2n+1} = 1 + 2^{2n-1+2} = 1 + 4\cdot 2^{2n-1} = (1 + 2^{2n-1}) + 3\cdot 2^{2n-1}\,,$$

de onde é imediato se concluir.
(O aluno que conhecer congruências mod 3 poderá facilmente aplicá-las para escrever uma resolução alternativa ainda mais curta.)

PROBLEMA 5 .

Para cada inteiro $n \geqslant 0$, indiquemos por $f(n)$ a quantidade de pares (x, y) , onde ambos x e y são inteiros $\geqslant 0$, verificando a equação $x + 2y = n$. Pede-se:
a).- achar $f(0)$ e $f(1)$;
b).- mostrar que vale $f(n) = 1 + f(n - 2)$, para todos os $n \geqslant 2$;
c).- achar uma fórmula para $f(n)$.
Resolução:
a).- Entre os inteiros $\geqslant 0$, é imediato que apenas $(x, y) = (0, 0)$ resolve $x + 2y = 0$, logo $f(0) = 1$; por sua vez, somente $(x, y) = (1, 0)$ resolve $x + 2y = 1$, logo $f(1) = 1$.

b).- Geometricamente, $f(n)$ é a quantidade de pontos do plano cartesiano que estão sobre a reta $x + 2y = n$ e cujas duas coordenadas são inteiros $\geqslant 0$. Entendido isso, o gráfico abaixo permite ver facilmente que cada vez que o k da reta $x + 2y = k$ aumentar duas unidades, o número de pontos (de coordenadas inteiras $\geqslant 0$) interseptados aumenta de um. Ou seja: $f(n) = 1 + f(n - 2)$.



c).- A fim de podermos descobrir um padrão, calculemos iteradamente os valores iniciais de $f(n)$. Usando a recursão achada em (b), temos:

```
f(0) = 1
f(1) = 1
f(2) = 1 + f(0) = 2
f(3) = 1 + f(1) = 2
f(4) = 1 + f(2) = 3
f(5) = 1 + f(3) = 3
f(6) = 1 + f(4) = 4
f(7) = 1 + f(5) = 4
etc.
```

Daí, inferimos que $f(2k) = k + 1$ e $f(2k + 1) = k + 1$; equivalentemente:

$$\begin{aligned} f(n) &= 1 + n/2, \quad \text{quando n for par} \\ &= 1 + (n-1)/2, \quad \text{quando n for impar.} \end{aligned}$$

Para provarmos rigorosamente essa afirmação, basta mostrar que a validade das expressões acima para um dado n (par ou ímpar) implica na validade do valor seguinte de n que tenha a mesma paridade. Para isso, usaremos a recorrência. Vejamos. No caso de $n =$ par, temos: $f(n + 2) = 1 + f(n) = 1 + 1 + n/2 = 2 + n/2 = 1 + (n + 2)/2$. No caso de n ímpar: $f(n+2) = 1+f(n) = 1+1+(n-1)/2 = 2+(n-1)/2 = 1+(n+1)/2$.