2012 nível 1

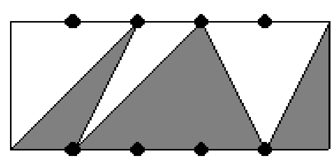
Olimpíada Regional de Matemática
Grande PoA
Sociedade Brasileira de Matemática

Questão 1 – (valor 10)
Sejam u, v, w três números reais, tais que u–v e u+v+w são números racionais. Pergunta-se:
a).- Se um dentre u e v for racional, então w é racional? Justifique.
b).- Se v for racional, então u+v é racional? Justifique.
c).- Se w for racional, então u e v são racionais? Justifique.
Resp.:
temos 2u+w = (u-v)+(u+v+w) = rac + rac = rac, e 2v+w = (u+v+w)-(u-v) = rac – rac = rac.
a).- se u for rac, então 2u+w = rac dá w = rac – 2 rac = rac;
se v for rac, 2v+w = rac dá w = rac -2 rac = rac.
b).- se v for rac, u = (u-v)+v = rac + rac =rac.
c).- se w for rac, 2u+w = rac dá 2u = rac – rac = rac, logo u rac;
e 2v+w = rac dá, semelhantemente, v rac.

Questão 2 – (valor 10)
a).- Do início do ano até agora, as economias (poupança) de Maria aumentaram 5%. Neste Natal, quanto ela poderá gastar de suas atuais economias de modo a voltar ao que tinha no início do ano?
b).- Hoje, as economias de José são oito vezes maiores do que as que ele tinha há três anos. Qual o aumento ***anual*** *percentual equivalente?*
Resp.:
a). P' = 1,05 P, para voltar ao que tinha, precisamos ter (1-g)P' = P, ou seja: (1-g) 1,05 = 1, de onde sai g = 1 – 1/1,05 = 1 – 0,9524 = 0,0476 = 4,76%.
b). $P' = 8P = (1+a)^3 P$, de modo que $(1+a)^3 = 8$, ou seja: 1+a = 2, logo a = 1 = 100% anual

Questão 3 – (valor 10)
Um jardineiro gastou 30 min para aparar a grama de um canteiro circular, de 5 m de diâmetro. Em quanto tempo cortará a grama de um canteiro de 10 m de diâmetro?
Resp.:
como a área é diretamente proporcional ao quadrado do diâmetro, a área do novo canteiro é quatro vezes maior do que a do primeiro, logo o jardineiro gastará quatro vezes mais tempo, o que significa 120 min = 2 horas.

Questão 4 – (valor 10)



Na figura ao lado, o retângulo tem área 14.
Qual a área da parte sombreada?
Resp.:
todos os triângulos sombreados têm altura igual a do retângulo, e a soma de suas bases é a base do retângulo. Logo a área sombreada é 14/2 = 7.

Questão 5 – (valor 15)
Determinar a menor potência de 60 que é divisível por 36^4 .
Resp.:
Temos as fatorações em primos: $60 = 2^2 \times 3 \times 5$, $36 = 2^2 \times 3^2$, logo

$$\frac{60^n}{36^4} = \frac{2^{2n} \times 3^n \times 5^n}{2^8 \times 3^8}$$

é um número inteiro se, e só e, n é múltiplo de 8. Ou seja: a menor potência pedida é 8.

Questão 6 – (valor 15)

Achar todos os inteiros positivos n, tais que 7 é divisor de $6^n + 8^n$.

Resp.:

Equivale a acharmos os n inteiros positivos tais que $6^n + 8^n \equiv 0$ (mod 7). Ora, em mod 7, temos $6 \equiv -1$ e $8 \equiv 1$, de modo que $6^n + 8^n \equiv (-1)^n + 1^n \equiv (-1)^n + 1$, e esta soma dá zero, para n inteiro positivo, quando, e somente quando, n for inteiro positivo ímpar.

Questão 7 – (valor 15)

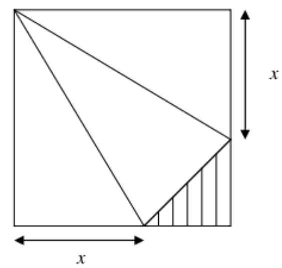
Suponhamos que uma fração irredutível $\frac{c}{b}$ *possa ser escrita na forma* $m + \frac{a}{b}$ *, para algum número inteiro positivo m. Mostre que a fração* $\frac{a}{b}$ *tem de ser irredutível.*

Resp.:

Temos c = mb + a e que b e c não têm fatores primos comuns. Se a/b não fosse irredutível o b teria um fator comum com a, logo teria um fator primo comum com mb+a, ou seja: b teria um fator primo comum com c: um absurdo.

Questão 8 – (valor 15)

O quadrado da figura tem lado unitário. Se dele eliminarmos a parte triangular tracejada, que valor de x faz com que a área de cada uma das outras três partes triangulares seja a mesma?



Resp.:

Temos que:

área do quadrado = (área dos três triang grandes) – (área do triang tracejado), disso resulta que

uma condição necessária para o problema ter solução é x resolver a equação

$$1 = 3\,\frac{x}{2} + \frac{(1-x)^2}{2}$$

a qual equivale a $2 = 3x + (1 - 2x + x^2)$, ou seja: $x^2 + x - 1 = 0$. Por Bhaskara, vemos que ela tem uma única solução positiva: $x = (-1+\sqrt{5})/2 \simeq 0{,}618.$

Resta verificar que esse valor de x é suficiente para resolver o problema. Para tal, basta mostrar que o triângulo grande do meio efetivamente tem área x/2. Indiquemos por L os lados desse triang, por b sua base (ela é a hipotenusa do triag tracejado), e por H sua altura relativa a tal base. Indicando por h a altura do triang tracejado, temos: H + h = $\sqrt{2}$. Tudo o que resta fazer é mostrar que bH/2 = x/2, ou seja: bH = x. Ora, Pythagoras dá: $L^2 = 1 + x^2$, $b^2 = 2(1-x)^2$, e

$$h^2 = (1-x)^2 - \frac{2(1-x^2)}{4} = (1-x^2) - \frac{1-x^2}{2} = \frac{1-x}{2}\ ,$$

de modo que $H = \sqrt{2} - h = \sqrt{2} - \frac{1-x}{\sqrt{2}} = \frac{2-1+x}{\sqrt{2}} = \frac{1+x}{\sqrt{2}}$, e então

$bH = \sqrt{2}\,\frac{(1-x)\cdot(1+x)}{\sqrt{2}} = (1-x)(1+x) = 1 - x^2 = x$, onde usamos que x verifica $x^2 + x - 1 = 0$.