2012 nível 2 **Olimpíada Regional de Matemática**
Grande PoA
Sociedade Brasileira de Matemática

<u>Questão 1</u> – (valor 10)
Responda, justificando:
a).- $\sqrt{x}$ irracional implica x irracional?
b).- $\sqrt{x}$ racional implica x racional?
c).- x irracional implica $\sqrt{x}$ irracional?
d).- x racional implica $\sqrt{x}$ racional?
Resp.:
a).- não, conforme mostra x=2.
b).- sim, pois o quadrado de rac é rac.
c).- sim, pois caso contrário o raciocínio de (b) daria que x seria racional; um absurdo.
d).- não, como mostra x=2.

<u>Questão 2</u> – (valor 10)
a).- Do início do ano até agora, as economias (poupança) de Maria aumentaram 5%. Neste Natal, quanto ela poderá gastar de suas <u>atuais</u> economias de modo a voltar ao que tinha no início do ano?
b).- Hoje, as economias de José são oito vezes maiores do que as que ele tinha há três anos. Qual o aumento <u>anual</u> percentual equivalente?
Resp.:
a). P' = 1,05 P, para voltar ao que tinha, precisamos ter (1-g)P' = P, ou seja: (1-g) 1,05 = 1, de onde sai g = 1 – 1/1,05 = 1 – 0,9524 = 0,0476 = 4,76%.
b). $P' = 8P = (1+a)^3 P$, de modo que $(1+a)^3 = 8$, ou seja: 1+a = 2, logo a = 1 = 100% anual

<u>Questão 3</u> – (valor 10)
Duas caldeiras industriais semelhantes têm área total de 40 e 160 m^2 , respectivamente. Sabendo que a segunda tem capacidade de 3 400 m^3 , calcular a capacidade da primeira.
Resp.:
$A \propto L^2$, de modo que $\frac{A_1}{A_2} = \frac{L_1^2}{L_2^2}$, ou seja: $\frac{L_1^2}{L_2^2} = \frac{1}{4}$ e então $\frac{L_1}{L_2} = \frac{1}{2}$. Por outro lado:
$V \propto L^3$, de modo que $\frac{V_1}{V_2} = \frac{L_1^3}{L_2^3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$. Ou seja, $V_1 = \frac{V_2}{8} = \frac{3400}{8}$.

<u>Questão 4</u> – (valor 10)
Determinar a menor potência de 60 que é divisível por 36^4 .
Resp.:
Temos as fatorações em primos: $60 = 2^2 \times 3 \times 5$, $36 = 2^2 \times 3^2$, logo

$$\frac{60^n}{36^4} = \frac{2^{2n} \times 3^n \times 5^n}{2^8 \times 3^8}$$

é um número inteiro se, e só e, n é múltiplo de 8. Ou seja: a menor potência pedida é 8.

<u>Questão 5</u> – (valor 15)

Achar todos os inteiros positivos n, tais que $n^3 - n$ *é divisível por 6.*

Resp.:

temos de achar todos os inteiros positivos n tais que $n^3 \equiv n$ (mod 6). Para isto, basta calcular em mod 6 o valor de n^3 para n=0, 1, 2,..., 5. Confira:

n=0 → $n^3=0$, n=1 → $n^3=1$, n=2 → $n^3=8 \equiv 2$, n=3 → $n^3=27 \equiv 3$, n=4 → $n^3=256 \equiv 4$, n= $5 \equiv -1$ → $n^3 \equiv -1 \equiv 5$. Consequentemente, $n^3-n \equiv 0$, para todos os inteiros positivos n.

<u>Questão 6</u> - (valor 15)

Suponhamos que uma fração irredutível $\frac{c}{b}$ *possa ser escrita na forma* $m+\frac{a}{b}$ *, para algum número inteiro positivo m. Mostre que a fração* $\frac{a}{b}$ *tem de ser irredutível.*

Resp.:

Temos c = mb + a e que b e c não têm fatores primos comuns. Se a/b não fosse irredutível o b teria um fator comum com a, logo teria um fator primo comum com mb+a, ou seja: b teria um fator primo comum com c: um absurdo.

<u>Questão 7</u> – (valor 15)

a).- Achar todos os inteiros positivos p e q, tais que $\frac{1}{\sqrt{p}+\sqrt{q}} = \sqrt{p}-\sqrt{q}$ *.*

b).- Achar o menor inteiro positivo n, tal que

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} \geq 100 \ .$$

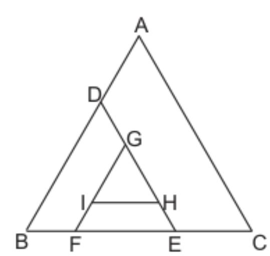
Resp.:

a).- $1=(\sqrt{p}+\sqrt{q})(\sqrt{p}-\sqrt{q})=p-q$, de modo que $p=q+1$.

b).- usando o resultado anterior, vemos que o membro esquerdo da desigualdade dada vale: $(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$, de modo que temos de achar o menor n verificando: $\sqrt{n+1}-1 \geq 100$, ou seja: $n+1 \geq 101^2$, logo n = 10 201 – 1 = 10 200.

<u>Questão 8</u> – (valor 15)

Na figura ao lado, o triângulo ABC é equilátero, e os segmentos AC e DE são paralelos, bem como BD e FG, e também HI e FE.
Pede-se:
a).- Mostrar que IHG é equilátero.
b).- Determinar a razão entre as áreas de ABC e IHG, sabendo que AB = 3 AD, BE = 3 BF, EG = 3 EH.



Resp.:

a).- Como DE // AC, temos $\sphericalangle BDE = \sphericalangle BAC = 60^o$ e $\sphericalangle BED = \sphericalangle BCA = 60^o$.

De FG // BD sai $\sphericalangle IGH = \sphericalangle BDE = 60^o$. Analogamente, de HI // FE segue que $\sphericalangle IHG = \sphericalangle BED = 60^o$. Logo $\sphericalangle GIH = 60^o$ e assim o triang IHG é equilátero.

b).- De AD = AB/3 segue BE = BD = 2/3 AB.

De BF = BE/3 segue EG = FE = 2/3 BE = 2/3 2/3 AB = 4/9 AB.

De Eb = EG/3 segue GH = 2/3 EG = 2/3 FE = 2/3 4/9 AB = 8/27 AB.

Portanto, a relação de semelhança entre os triang ABC e IHG é 8/27; consequentemente, a razão entre suas áreas é o quadrado de 8/27, ou seja: 64/729.