2012 **nível 3** **Olimpíada Regional de Matemática** **Grande PoA**

Sociedade Brasileira de Matemática

<u>Questão 1</u> – (valor 10)

D*ecidir se o número* $\sqrt{12+6\sqrt{3}}+\sqrt{12-6\sqrt{3}}$ *é racional ou irracional. Justifique.*

Resp.:

Indicando por x o número dado e usando a identidade clássica $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$, tomando o quadrado de x, obtemos: $x^2=24+2\sqrt{36}=24+12=36$, de modo que x = 6 = racional.

<u>Questão 2</u> - (valor 10)

Suponhamos que uma fração irredutível $\frac{c}{b}$ *possa ser escrita na forma* $m+\frac{a}{b}$ *, para algum número inteiro positivo m. Mostre que a fração* $\frac{a}{b}$ *tem de ser irredutível.*

Resp.:

Temos c = mb + a e que b e c não têm fatores primos comuns. Se a/b não fosse irredutível o b teria um fator comum com a, logo teria um fator primo comum com mb+a, ou seja: b teria um fator primo comum com c: um absurdo.

<u>Questão 3</u> – (valor 10)

Responda, justificando:

a).- $\sqrt{x}$ *racional implica x racional?*

b).- x *irracional implica* $\sqrt{x}$ *irracional?*

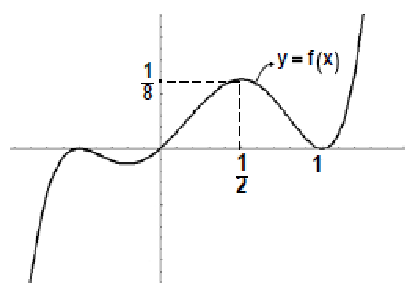
Resp.:

a).- sim, pois o quadrado de rac é rac.

b).- sim, pois caso contrário o raciocínio de (a) daria que x seria racional; um absurdo.

<u>Questão 4</u> – (valor 10)

Ao lado está representado o gráfico cartesiano de uma função polinomial, y = f(x). Pede-se determinar o resto da divisão do polinômio f(x) por (x – 1)(x - ½).



Resp.:

como f(x) é um polinômio e $(x-1)(x-1/2)$ tem grau=2:

$f(x)=(x-1)(x-1/2)Q(x)+(ax+b)$. Resta achar os valores de a e b; para isso, usando o gráfico:

$0=f(1)=a+b$,$1/8=f(1/2)=a/2+b$.

Resolvendo este sistema de equações, obtemos $a=-1/4$, $b=1/4$.

<u>Questão 5</u> – (valor 15)

Achar todos os inteiros positivos n, tais que 7 é divisor de 6^n+8^n .

Resp.:

Equivale a acharmos os n inteiros positivos tais que $6^n+8^n\equiv 0$ (mod 7). Ora, em mod 7, temos $6\equiv -1$ e $8\equiv 1$, de modo que $6^n+8^n\equiv(-1)^n+1^n\equiv(-1)^n+1$, e esta soma dá zero, para n inteiro positivo, quando, e somente quando, n for inteiro positivo <u>ímpar</u>.

Questão 6 – (valor 15)

a).- Mostre que o gráfico cartesiano da função $y = x+\dfrac{1}{x}$ *(definida para x>0) não tem nenhum ponto com ordenada < 2. (Respostas baseadas em tabelas serão consideradas inconclusivas.)*

b).- Deduza de (a) que, para quaisquer números reais positivos (a, b, c, d, e), vale:

$$\frac{1}{a}(1+ab)+\frac{1}{b}(1+bc)+\frac{1}{c}(1+ac)+\frac{1}{d}(1+de)+\frac{1}{e}(1+de)\geq 10$$

Resp.:

a).- Equivale a mostrar que $x+1/x\geqslant 2$, para todos os $x>0.$ E isto é o mesmo que mostrar que a média aritmética de x e 1/x é maior ou igual que 1. Ora, da clássica relação entre média aritmética e geométrica, segue:

$$1 = \sqrt{x\cdot\frac{1}{x}} \leqslant \frac{x+\dfrac{1}{x}}{2} .$$

b).- Temos de mostrar que

$(\dfrac{1}{a}+b)+(\dfrac{1}{b}+c)+(\dfrac{1}{c}+a)+(\dfrac{1}{d}+e)+(\dfrac{1}{e}+d)\geqslant 10$, ou $a+b+c+d+e+\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}+\dfrac{1}{e}\geqslant 10.$

Ora, esta última desigualdade é imediata de (a), pois (a) nos permite escrever:

$$(a+\frac{1}{a})+(b+\frac{1}{b})+(c+\frac{1}{c})+(d+\frac{1}{d})+(e+\frac{1}{e})\geqslant 10 \quad .$$

Questão 7 – (valor 15)

Seja f uma função de valores reais, definida para todos os racionais positivos e que verifica as seguintes condições: $f(1)=7$ *,* $f(x\cdot f(y))=x\cdot f(f(y))$ *. Pede-se o valor de f(2012).*

Resp.:

$f(7x)=f(f(1)\cdot x)=f(x\cdot f(1))=x\,f(f(1))=x\ f(7)$. Tomando x = 1/7: $7=f(1)=1/7\ f(7)$, de modo que f(7) = 49. Tomando x = 2012/7, obtemos $f(2012)=2012/7\,f(7)=2012/7\cdot 49=14084$.

Questão 8 – (valor 15)

Abaixo são mostrados exemplos de sequências de dois, três e quatro inteiros positivos, respectivamente, cujos recíprocos têm soma igual a um:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1,\ \ \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1,\ \ \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{42}=1 .$$

Pede-se mostrar que, para cada $n\geqslant 2$ *, encontra-se uma sequência de n inteiros positivos desse tipo, ou seja: cujos recíprocos têm soma igual a um e (para* $n\geqslant 3$ *) são todos distintos.*

Resp.:

observemos o padrão dado: $(2,2)\rightarrow(2,3,2\cdot 3)=(2,3,6)\rightarrow(2,3,7,6\cdot 7)=(2,3,7,42)$, o qual pode ser continuado: $(2,3,7,42)\rightarrow(2,3,7,43,42\cdot 43)=(2,3,7,43,1806)$, etc. Verifiquemos que a continuação funciona: ½ + 1/3+1/7+1/43+1/1806 = 1. Encorajados, provemos que esse padrão <u>sempre</u> dá soma unitária.

Escrevamos $s_n=\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}$ e provemos que $s_n=1$, para todos os $n\geqslant 2$, desde que os a_n , sejam dados por:

$a_2=2$, $a_3=a_2\cdot(1+a_2)=2\cdot 3=6$, $a_4=a_3\cdot(1+a_3)=6\cdot 7=42$, $a_5=a_4\cdot(1+a_4)=42\cdot 43=1806$,etc.,

$a_{n+1}=a_n\cdot(1+a_n)$. A prova é por indução, usando que vale para n=2. Temos:

$s_{n+1}=\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{1+a_n}+\dfrac{1}{a_{n+1}}=s_n-\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{1}{1+a_n}+\dfrac{1}{a_{n+1}}=1-\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{1}{1+a_n}+\dfrac{1}{a_{n+1}}$, de modo que basta provar que a soma das duas últimas parcelas vale $1/a_n$. Ora, isso é imediato, pois

$$\frac{1}{1+a_n}+\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{1+a_n}+\frac{1}{a_n\cdot(1+a_n)}=\frac{1}{1+a_n}\cdot(1+\frac{1}{a_n})=\frac{a_n+1}{a_n\cdot(1+a_n)}=\frac{1}{a_n} .$$