 olimatrsgoo@gmail.com

Nível 1

Questão 1 –

Se sortearmos três números inteiros distintos, mostre que sempre *podemos garantir que ao menos dois deles têm como média aritmética um número também inteiro.*

Resp.

Entre esses três números teremos de ter ao menos dois com mesma paridade, ou seja: ao menos dois pares ou ao menos dois ímpares. Em qualquer dessas duas possibilidades, a média destes dois números é o resultado da divisão de um par por 2, logo é um inteiro.

Questão 2 –

Um hospital veterinário hospeda apenas cachorros e gatos. Hoje, está hospedando 10% mais gatos do que cachorros. Do total de animais hospedados, que percentual corresponde aos gatos.

Resp.

Com óbvia notação, $H = c + g$ e $g = 1,10c$. Logo $\frac{g}{H} = \frac{1,10c}{c+1,10c} = \frac{1,1}{2,1} \simeq 0,524 = 52,4\%$ dos animais hospedados são gatos.

Questão 3 –

José quer preparar laranjada e iniciou enchendo completamente com água uma jarra. A seguir, tirou 10% dessa água e completou a jarra com suco puro de laranja. Depois de misturar bem, como achou que ficou fraca, retirou mais 10% do conteúdo da jarra e completou com suco puro de laranja. Finalmente, repetiu mais uma vez a operação, isto é: retirou 10% da última mistura e completou com o suco puro de laranja.
Qual é a quantidade percentual de suco puro de laranja que ficou na jarra?

Resp.

Indiquemos por j o volume da jarra e por L_1, L_2 e L_3 a quantidade de suco puro de laranja em cada uma das três laranjadas que José preparou. Temos:

$L_1 = 0,10j$, tirou $0,01j$, logo $L_2 = 0,10j + 0,09j = 0,19j$; tirou $0,019j$, logo $L_3 = 0,10j + L_2 - 0,019j = 0,10j + 0,19j - 0,019j = 0,290j - 0,019j = 0,271j$, ou seja a jarra ficou com $27,1\%$ de suco puro de laranja.

Questão 4 –

A empresa X pretende comercializar imagens do mascote da Copa/2014. Fizeram uma primeira imagem de 25 cm de altura que pesou 2 kg. O dono achou muito pesada e mandou fazer uma nova imagem com a metade da altura. Sendo dado que o material usado será o mesmo, qual o peso dessa segunda imagem?

Resp.

As imagens são figuras semelhantes, pois representam o mesmo mascote. Além disso, o peso de imagens semelhantes (e feitas do mesmo material) varia proporcionalmente com o cubo da altura. Logo, como a segunda imagem tem a metade da altura da primeira, seu peso será um oitavo desta. Resposta: a segunda imagem pesa 2/8 = 0,25 kg.

Questão 5 –

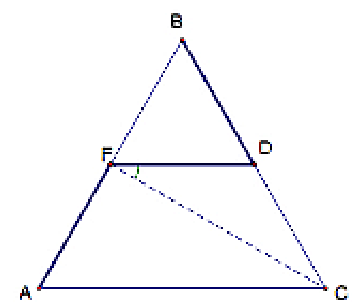
Consideremos todos os números inteiros, N, cuja representação decimal tem a forma $N = aaa$ (com três dígitos iguais e não nulos). Pede-se:

a). determinar o menor e o maior expoente que pode ocorrer na fatoração em números primos de tais N;
b). determinar o valor de a para o qual ocorre o maior divisor de N (distinto do próprio N).

Resp.
$N = aaa = 111 \times a = 3 \times 37 \times a$, sendo que, como a é um dígito não nulo, os possíveis valores para a são: 1, 2, 3, 2^2, 5, 2×3, 7, 2^3 e 3^2.
a). O menor expoente é um, pois 37 é primo e a não tem 37 como fator primo. Por outro lado, pelo que vimos acima, temos: $111 = 3 \times 37$, $222 = 2 \times 3 \times 37$, $333 = 3^2 \times 37$, $444 = 2^2 \times 3 \times 37$, $555 = 3 \times 5 \times 37$, $666 = 2 \times 3^2 \times 37$, $777 = 3 \times 7 \times 37$, $888 = 2^3 \times 3 \times 37$, $999 = 3^3 \times 37$. Logo, o maior expoente é 3, e ele ocorre em 888 e 999.
b). Examinando as fatorações em primos da lista acima, vemos que o N que tem o maior divisor (distinto de N) deve ser 666, 888 ou 999, e esse divisor deverá ser $3^2 \times 37$, $2^2 \times 3 \times 37$ ou $3^2 \times 37$; ora esses números valem, respectivamente, 333, 444 e 333, logo o N de maior divisor (distinto dele) é $N = 888$, e o tal divisor é 444. Resposta: $a = 8$.

Questão 6 –

Na figura ao lado, temos as igualdades de comprimento: $AB = BC$ e $AF = FD = DB$. Ademais, sabe-se que AC e FD são paralelos. Pede-se o valor do ângulo CFD.



Resp.
É imediato que o triângulo BFD é equilátero, logo os ângulos em A, B e C medem 60 graus. Indicando por α a medida do ângulo CFD, como a soma dos ângulos do triângulo ACF vale 180 graus e CDF é isósceles, temos: $(180° - 60° - \alpha) + 60° + (60° - \alpha) = 180°$, logo $2\alpha = 60°$, ou seja: $\alpha = 30°$.

Questão 7 –

a). Determine número inteiro n tal que $\sqrt{5} + \sqrt{45} = \sqrt{n}$.
b). Usando o item anterior, decida se $\sqrt{5} + \sqrt{45}$ é um número racional ou um número irracional, citando propriedade que usou para decidir.

Resp.
a). Pela identidade clássica $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, temos $n = (\sqrt{5} + \sqrt{45})^2 = 5 + 2\sqrt{225} + 45 = 5 + 30 + 45 = 80$

b). Temos $\sqrt{5} + \sqrt{45} = \sqrt{80} = \sqrt{16 \times 5} = 4\sqrt{5}$, que é um número irracional, pois $\sqrt{5}$ é irracional (raiz quadrada de um inteiro positivo que não é um quadrado de inteiro) e inteiro $\times$ irracional = irracional; ou, meramente use que 80 não é quadrado de nenhum inteiro, logo $\sqrt{80}$ é irrracional.

Questão 8 –

O brazão *de um número inteiro positivo é o par* $(a;b)$ *no qual a é a quantidade de divisores (positivos) deste número que são menores do que ele, e b é a soma desses divisores. Exemplificando: o brazão do inteiro 10 é* $(3;8)$ *, pois os divisores de 10 que são menores do que 10 são 1, 2 e 5, e sua soma vale 8. Assim sendo, pede-se:*

a). determinar todos os números cujo brazão é (2 ; 3) ;

b). entre os números cujo brazão tem a forma (6 ; m), determinar o menor valor de m.

Resp.

a). Buscamos os inteiros positivos N que têm exatamente dois divisores $< N$ e cuja soma é 3. Esses divisores só podem ser 1 e 2, e disso sai que $N = 4$ é o único N possível.

b). Iniciemos recordando que, tendo a fatoração em primos de um inteiro N, o Teorema Fundamental da Aritmética mostra que a quantidade de divisores desse N é dada por um *produto*: o produto dos expoentes adicionados de um dessa fatoração. Exemplo: $N = 72 = 2^3 \times 3^2$, logo a quantidade de divisores de 72 é o produto $(3+1) \times (2+1) = 12$, e esses divisores são os números da forma $2^a \times 3^b$, onde $0 \leqslant a \leqslant 3$ e $0 \leqslant b \leqslant 2$.

No caso deste item (b), buscamos os inteiros positivos N com 7 divisores (incluindo N), o que é uma quantidade *prima* de divisores. Logo, N tem de ter um único fator primo: $N = p^a$, para algum primo $p = 2, 3, \ldots$. Consequentemente, os N cujo brazão é $(6; m)$ têm a forma $N = p^6$, seus divisores (menores do que N) são $1, p, p^2, \ldots, p^5$ e verificam $m = 1 + p + p^2 + \cdots + p^5$.

Fica agora imediato se ver que o menor valor possível para m ocorre para $p = 2$, e assim $N = 2^6 = 64$, e $m = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^5 = 2^6 - 1 = 63$.