Nível 2

Questão 1 –
Se sortearmos três números inteiros distintos, mostre que sempre *podemos garantir que ao menos dois deles têm como média aritmética um número também inteiro.*
Resp.
Entre esses três números teremos de ter ao menos dois com mesma paridade, ou seja: ao menos dois pares ou ao menos dois ímpares. Em qualquer dessas duas possibilidades, a média destes dois números é o resultado da divisão de um par por 2, logo é um inteiro.

Questão 2 –
José quer preparar laranjada e iniciou enchendo completamente com água uma jarra. A seguir, tirou 10% dessa água e completou a jarra com suco puro de laranja. Depois de misturar bem, como achou que ficou fraca, retirou mais 10% do conteúdo da jarra e completou com suco puro de laranja. Finalmente, repetiu mais uma vez a operação, isto é: retirou 10% da última mistura e completou com o suco puro de laranja.
Qual é a quantidade percentual de suco puro de laranja que ficou na jarra?
Resp.
Indiquemos por j o volume da jarra e por L_1, L_2 e L_3 a quantidade de suco puro de laranja em cada uma das três laranjadas que José preparou. Temos:
$L_1 = 0,10j$, tirou $0,01j$, logo $L_2 = 0,10j + 0,09j = 0,19j$; tirou $0,019j$, logo $L_3 = 0,10j + L_2 - 0,019j = 0,10j + 0,19j - 0,019j = 0,290j - 0,019j = 0,271j$, ou seja a jarra ficou com $27,1\%$ de suco puro de laranja.

Questão 3 –
A empresa X pretende comercializar imagens do mascote da Copa/2014. Fizeram uma primeira imagem de 25 cm de altura que pesou 2 kg. O dono achou muito pesada e mandou fazer uma nova imagem com a metade da altura. Sendo dado que o material usado será o mesmo, qual o peso dessa segunda imagem?
Resp.
As imagens são figuras semelhantes, pois representam o mesmo mascote. Além disso, o peso de imagens semelhantes (e feitas do mesmo material) varia proporcionalmente com o cubo da altura. Logo, como a segunda imagem tem a metade da altura da primeira, seu peso será um oitavo desta. Resposta: a segunda imagem pesa $2/8 = 0{,}25$ kg.

Questão 4 –

a). Determine número inteiro n tal que $\sqrt{5} + \sqrt{45} = \sqrt{n}$.
b). Usando o item anterior, decida se $\sqrt{5} + \sqrt{45}$ é um número racional ou um número irracional, citando propriedade que usou para decidir.

Resp.
a). Pela identidade clássica $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, temos $n = (\sqrt{5} + \sqrt{45})^2 = 5 + 2\sqrt{225} + 45 = 5 + 30 + 45 = 80$

b). Temos $\sqrt{5} + \sqrt{45} = \sqrt{80} = \sqrt{16 \times 5} = 4\sqrt{5}$, que é um número irracional, pois $\sqrt{5}$ é irracional (raiz quadrada de um inteiro positivo que não é um quadrado de inteiro) e inteiro × irracional = irracional; ou, meramente use que 80 não é quadrado de nenhum inteiro, logo $\sqrt{80}$ é irrracional.

Questão 5 –

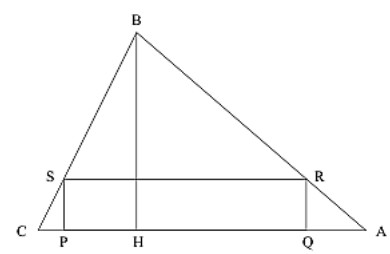
Consideremos todos os números inteiros, N, cuja representação decimal tem a forma $N = aaa$ (com três dígitos iguais e não nulos). Pede-se:

a). determinar o menor e o maior expoente que pode ocorrer na fatoração em números primos de tais N;
*b). determinar o valor de a para o qual ocorre o maior divisor de N (*distinto *do próprio N).*

Resp.
$N = aaa = 111 \times a = 3 \times 37 \times a$, sendo que, como a é um dígito não nulo, os possíveis valores para a são: 1, 2, 3, 2^2, 5, 2×3, 7, 2^3 e 3^2.
a). O menor expoente é um, pois 37 é primo e a não tem 37 como fator primo. Por outro lado, pelo que vimos acima, temos: $111 = 3 \times 37$, $222 = 2 \times 3 \times 37$, $333 = 3^2 \times 37$, $444 = 2^2 \times 3 \times 37$, $555 = 3 \times 5 \times 37$, $666 = 2 \times 3^2 \times 37$, $777 = 3 \times 7 \times 37$, $888 = 2^3 \times 3 \times 37$, $999 = 3^3 \times 37$. Logo, o maior expoente é 3, e ele ocorre em 888 e 999.
b). Examinando as fatorações em primos da lista acima, vemos que o N que tem o maior divisor (distinto de N) deve ser 666, 888 ou 999, e esse divisor deverá ser $3^2 \times 37$, $2^2 \times 3 \times 37$ ou $3^2 \times 37$; ora esses números valem, respectivamente, 333, 444 e 333, logo o N de maior divisor (distinto dele) é $N = 888$, e o tal divisor é 444.
Resposta: $a = 8$.

Questão 6 –

No triângulo desenhado, escolhe-se os pontos P e Q sobre o lado AC de modo tal que PQRS seja um retângulo. Pede-se expressar o valor da área desse retângulo *em função do comprimento x do segmento PQ e do comprimento b do lado AC, bem como da altura h do vértice B em relação a esse lado AC.*



A área $\mathscr{A}$ pedida vale $\mathscr{A} = x \times QR$. Ora, pelo Teorema de Thales:

$$\frac{QR}{h} = \frac{AQ}{AH} = \frac{SP}{h} = \frac{CP}{CH} = \frac{AQ + CP}{AH + CH} = \frac{b - x}{b}, \text{ de modo que } \mathscr{A} = \frac{h}{b}\, x(b - x).$$

Questão 7 –

Seja a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, para todo $x \in \mathbb{R}$, onde $a \neq 0$, b e c são números reais. Mostrar que há exatamente um *número real r tal que tenhamos $f(r + x) = f(r - x)$, para* todos *os $x \in \mathbb{R}$.*
Resp.

$$
\begin{aligned}
& a(x+r)^2 + b(x+r) + c = a(r-x)^2 + b(r-x) + c \quad (\forall x \in \mathbb{R}) \iff \\
& ar^2 + 2arx + ax^2 + bx + br + c = ar^2 - 2arx + ax^2 + br - bx + c \quad (\forall x \in \mathbb{R}) \iff \\
& 2arx + bx = -2arx - bx \quad (\forall x \in \mathbb{R}) \iff \\
& 4arx + 2bx = 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R}) \iff \\
& x(2ar + b) = 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R}).
\end{aligned}
$$

Ora, a única maneira de $x(2ar + b) = 0$ valer para todos os $x \in \mathbb{R}$ é com $2ar + b = 0$. Conclusão:
$f(r + x) = f(r - x)$ (para *todos* os $x \in \mathbb{R}$) $\iff r = -\frac{b}{2a}$.

Questão 8 –

a). Mostre que a diferença entre os quadrados de dois inteiros ímpares sempre é um múltiplo de 8.

b). Conclua que é absurdo (ou impossível) que uma equação do segundo grau tenha entre suas raízes um número racional quando todos os três coeficientes dessa equação forem números inteiros ímpares.

Resp.
a). Como $(2m+1)^2-(2n+1)^2 = 4m^2+4m-4n^2-4n = 4m(m+1)-4n(n+1)$, basta mostrar que $k(k+1)$ é um múltiplo de 2, sempre que k for um número inteiro. Ora, se k for par, $k = 2h$, logo $k(k+1) = 2 \times h(2h+1)$; se k for ímpar, $k = 1+2h$, logo $k(k+1) = (1+2h)(2+2h) = 2 \times (1+2h)(1+h)$.

b). Raciocinemos por absurdo, ou seja: provemos que a suposição de uma raiz racional para tal equação nos leva a uma conclusão absurda.
Por Bhaskara, se $ax^2+bx+c=0$ tiver raiz racional, $\sqrt{b^2-4ac}$ será racional, e como os coeficientes são inteiros, isso implica que valha $k^2 = b^2-4ac$ para algum número inteiro k. Como os coeficientes são ímpares, segue que k^2 = ímpar - par = ímpar, e então o próprio k também é ímpar. Consequentemente, de $b^2-k^2 = 4ac$ e do item (a), segue que $4ac$ teria de ser um múltiplo de 8. Ora isso é um absurdo, pois a e c ímpares dão ac ímpar e 4 vezes um ímpar nunca dá múltiplo de 8.