Nível 3

Questão 1 –

Seja a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=(x+1)-2(x+2)+3(x+3)-4(x+4)+\ldots+2009(x+2009)-2010(x+2010)$, para cada $x\in\mathbb{R}$. Pede-se todas as raízes da equação $f(x)=0$.

Resp.

Temos $f(x)=A+B$, onde $A=x\big(1-2+3-4+\ldots+2009-2010\big)$ e $B=1^2-2^2+3^2-4^2+\ldots+2009^2-2010^2$.
Ora, aglutinando parcelas, duas a duas, podemos reescrever os 1005 pares de A e B como:
$A=x(-1-1-\ldots-1)=-1005x$, e
$B=(1-2)(1+2)+(3-4)(3+4)+\ldots+(2009-2010)(2009+2010)=-\big(1+2+3+\ldots+2009+2010\big)$
$=-\frac{2010\times2011}{2}=-1005\times2011$.
Logo, $f(x)=0\iff A+B=0\iff -1005x-1005\times2011=0\iff x=-2011$.

Questão 2 –

Para fins desta questão, supomos a água do mar como uma mistura contendo somente água pura e sal. Quando recém retirada do mar, um litro dessa água pesa 1 026 g e contém 27 g de sal. Tendo sido retirados 200 litros de água do mar, após algum tempo se constatou que a evaporação tinha produzido uma mistura de água pura e sal na qual o sal representava 15% do peso da mistura. Qual o volume evaporado?

Resp.

A mistura original, recém tirada do mar, pesava $200\times1026=205200$ gramas, das quais $200\times27=5400$ gramas eram de sal. Logo, ela tinha $205200-5400=199800$ gramas, ou 199,8 litros de água pura.
A mistura evaporada pesa E gramas, incluindo as 5400 gramas de sal originais. De modo que $5400/E=0,15$, ou seja: pesa $E=5400/0,15=36000$ gramas. Logo, na mistura evaporada existem $36000-5400=30600$ gramas de água pura, ou seja: 30,6 litros de água pura. Consequentemente, o volume evaporado foi $199,8-30,6=169,2$ litros.
(Também se poderia observar que a diferença $205200-36000=169200$ gramas, embora seja uma diferença envolvendo misturas de concentração distinta, tem de ser o peso de água pura evaporada, pois o sal não evapora. Logo, evaporaram 169,2 litros.)

Questão 3 –

Deseja-se fazer uma lista de números inteiros do tipo $\{1,a_1,a_2,a_3,\ldots,1000\}$, a qual inicia com 1, termina com 1000, e onde cada termo a partir do terceiro é a soma de todos os anteriores a ele: $a_2=1+a_1, a_3=1+a_1+a_2$, etc. Pede-se mostrar que existem tais listas e dar todos os possíveis valores de a_1.

Resp.

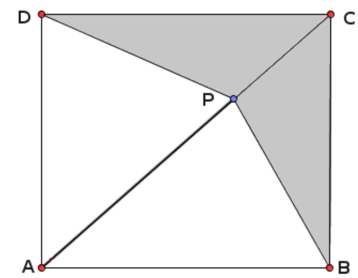
Temos $a_2=1+a_1$, $a_3=1+a_1+a_2=1+a_1+(1+a_1)=2(1+a_1)$, $a_4=1+a_1+a_2+a_3=a_3+a_2=2^2(1+a_1)$, e uma indução matemática imediata mostra que esse padrão continua, ou seja: $a_n=2^{n-2}(1+a_1)$, para todos os $n\geqslant2$. Daí, as listas desejadas são as que verificam $a_n=1000$, ou seja:

$$2^{n-2}(1+a_1)=1000\iff\frac{5^3\times2^3}{1+a_1}=2^{n-2}=\text{potência de }2.$$

Logo, a_1 tem de ser tal que $1+a_1=5^3\times2^k$, onde $k\leqslant3$, de modo que $a_1=-1+5^3\times2^k$, onde $k\leqslant3$.
Finalmente: $k=0\to a_1=-1+5^3\times2^0=124$, $k=1\to a_1=-1+5^3\times2^1=249$, $k=2\to a_1=-1+5^3\times2^2=499$, e $k=3\to a_1=-1+5^3\times2^3=999$. (Não foi pedido, mas a maior das listas possíveis é a que tem $a_1=124$.)

Questão 4 –

Na figura, ABCD é um quadrado de lado unitário e o ponto P move-se sobre a diagonal AC. Para cada valor x do comprimento do segmento AP, indiquemos por $a(x)$ o valor da área sombreada. Pede-se:



- a). *determinar uma fórmula (expressão analítica) para $a(x)$ em função de x;*
- b). *esboçar cuidadosamente o gráfico de $y = a(x)$.*

Resp.
a). A altura de P em relação ao lado AB mede $x/\sqrt{2}$, e divide AB em dois segmentos, um de medida $x/\sqrt{2}$ e o outro de medida $1 - x/\sqrt{2}$. Trabalhando com essa altura, fica fácil ver que

$$a(x) = \left(1 - \tfrac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 + \tfrac{x}{\sqrt{2}}\left(1 - \tfrac{x}{\sqrt{2}}\right) = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{2} - x\right)^2 + \tfrac{x}{2}\left(\sqrt{2} - x\right) = \tfrac{1}{2}\left(2 - 2\sqrt{2}x + x^2 + x\sqrt{2} - x^2\right) = 1 - \tfrac{\sqrt{2}}{2}x.$$

b). Como $x = AP$, temos $0 \leqslant x \leqslant \sqrt{2}$, de modo que o gráfico cartesiano de $y = a(x)$ é o *segmento de reta* que vai do ponto $(0,1)$ ao ponto $(\sqrt{2}, 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{2}) = (\sqrt{2}, 0)$.

Questão 5 –
Demonstrar que $64 + n^4$ *nunca é número primo, se n for um número inteiro* $\geqslant 1$.
Resp.
Temos $8^2 + (n^2)^2 = 8^2 + 16n^2 + (n^2)^2 - 16n^2 = \left(8 + n^2\right)^2 - \left(4n\right)^2 = \left(8 + n^2 + 4n\right)\left(8 + n^2 - 4n\right)$. Resumindo: $64 + n^4 = (n^2 + 4n + 8)(n^2 - 4n + 8)$. Ora, o primeiro fator é $\geqslant 8$, de modo que a única possibilidade de $64 + n^4$ ser primo é termos $n^2 - 4n + 8 = 1$, para algum número inteiro $n \geqslant 1$. Contudo, isso nunca ocorre, pois Bhaskara mostra imediatamente que esta equação não tem raízes inteiras.

Questão 6 –
Em um grupo de amigos que se comunica por telefone celular há a propagação, com um risco de erro de digitação*, de uma mensagem cujo teor original é "José passou no vestibular". Mais precisamente, suponhamos que cada amigo tem probabilidade de 90% de mandar a mesma mensagem que recebeu e de 10% enviar o contrário do que recebeu (não passou se passou, ou passou se não passou).*
Indiquemos por $p(n)$ a probabilidade de que no n-ésimo envio de informação esta esteja correta. Supondo que José tenha realmente passado, teremos $p(0) = 1$. Assim sendo, pede-se:

- a). *mostrar que (para valores a e b, a determinar) vale $p(n+1) = ap(n) + b$, para todos os $n \geqslant 0$;*
- b). *obter uma fórmula expressando $p(n)$ em função de n, e dela concluir que a longo prazo (ou seja, ao n crescer infinitamente) haverá uma probabilidade de apenas 50% de um amigo receber mensagem dizendo que José passou.*

Resp.
Indicando por $p(n)$ a probabilidade de se enviar a informação correta ("José passou ...") na n-ésima mensagem, e por $q(n)$ a probabilidade de se enviar a informação errada também na n-ésima mensagem.
a). Temos $p(n+1) = 0,9p(n) + 0,1q(n) = 0,9p(n) + 0,1(1 - p(n)) = 0,8p(n) + 0,1$, de modo que
$a = 0,8$ e $b = 0,1$.
b). Temos, sucessivamente:
$p(1) = 0,8p(0) + 0,1$,
$p(2) = 0,8p(1) + 0,1 = 0,8(0,8p(0) + 0,1) + 0,1 = 0,8^2 p(0) + 0,1(1 + 0,8)$,
$p(3) = 0,8p(2) + 0,1 = 0,8^3 p(0) + 0,1(1 + 0,8 + 0,8^2)$,
etc.,
e por indução matemática imediata:

$$p(n) = 0,8^n p(0) + 0,1\left(1 + 0,8 + 0,8^2 + \ldots + 0,8^{n-1}\right) = 0,8^n p(0) + 0,1 \times \frac{1-0,8^n}{1-0,8} = 0,8^n p(0) + \tfrac{1}{2}(1-0,8^n)\,.$$

Ora, como $p(0) = 1$, vemos que $p(n) = \frac{1}{2} \times (1 + 0,8^n)$, de modo que $p(n) \to \frac{1}{2} = 50\%$, ao $n \to \infty$.

Questão 7 –

a). Mostre que a diferença entre os quadrados de dois inteiros ímpares sempre é um múltiplo de 8.
b). Conclua que é absurdo (ou impossível) que uma equação do segundo grau tenha entre suas raízes um número racional quando todos os três coeficientes dessa equação forem números inteiros ímpares.

Resp.
a). Como $(2m+1)^2 - (2n+1)^2 = 4m^2 + 4m - 4n^2 - 4n = 4m(m+1) - 4n(n+1)$, basta mostrar que $k(k+1)$ é um múltiplo de 2, sempre que k for um número inteiro. Ora, se k for par, $k = 2h$, logo $k(k+1) = 2 \times h(2h+1)$; se k for ímpar, $k = 1 + 2h$, logo $k(k+1) = (1+2h)(2+2h) = 2 \times (1+2h)(1+h)$.

b). Raciocinemos por absurdo, ou seja: provemos que a suposição de uma raiz racional para tal equação nos leva a uma conclusão absurda.
Por Bhaskara, se $ax^2 + bx + c = 0$ tiver raiz racional, $\sqrt{b^2 - 4ac}$ será racional, e como os coeficientes são inteiros, isso implica que valha $k^2 = b^2 - 4ac$ para algum número inteiro k. Como os coeficientes são ímpares, segue que k^2 = ímpar - par = ímpar, e então o próprio k também é ímpar. Consequentemente, de $b^2 - k^2 = 4ac$ e do item (a), segue que $4ac$ teria de ser um múltiplo de 8. Ora isso é um absurdo, pois a e c ímpares dão ac ímpar e 4 vezes um ímpar nunca dá múltiplo de 8.

Questão 8 –

*Ao fazer um teste de QI, José ficou indignado com a questão "*Que número continua o padrão 1, 4, 9 ?*". Por isso, decidiu achar outra resposta que a óbvia 16. Ele decidiu construir o que denominaremos um PJ (Polinômio de José): um polinômio $p(x)$ de coeficientes inteiros que verifica $p(1) = 1$, $p(2) = 4$, $p(3) = 9$, mas tem $p(4) \neq 16$. Assim sendo, pede-se:*

a). construir um PJ;
b). demonstrar que todos os PJ tem grau $\geqslant 3$.

Resp.
Denotando por $p(x)$ um PJ, temos que $p(x) - x^2 = 0$ tem 1, 2 e 3 como raízes. Logo, vale a fatoração

$$p(x) - x^2 = (x-1)(x-2)(x-3)q(x)$$

para algum polinômio $q(x)$. Ora, $p(4) - 16 = 6q(4)$ e como José quer $p(4) \neq 16$, vemos que tudo o que ele tem de fazer é achar um $q(x)$ de coeficientes inteiros e tal que $q(4) \neq 0$.
a). Obviamente, existem infinitos tais $q(x)$ e o mais simples deles é $q(x) = 1$, o qual dá o PJ:
$p(x) = x^2 + (x-1)(x-2)(x-3)$.
b). É imediato de $p(x) = x^2 + (x-1)(x-2)(x-3)q(x)$, pois o fator $(x-1)(x-2)(x-3)$ já tem grau 3, logo $(x-1)(x-2)(x-3)q(x)$ terá grau 3 ou maior.