ORMGrande PoA/2015

OLIMPÍADA REGIONAL DE MATEMÁTICA DA GRANDE PORTO ALEGRE

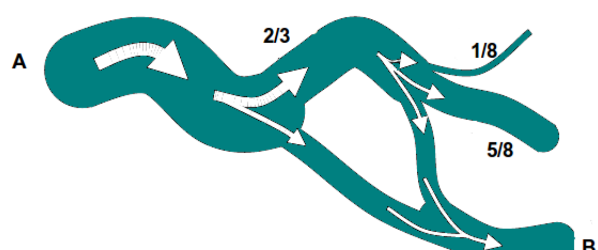
Questões nível 1

Questão 1 -

Deseja-se fazer 4 fichas, cada uma tendo uma frase no lado da frente e um número no lado de trás. Além disso, em cada ficha, o número não *pode corresponder ao que diz a frase.*
As frases são: “é maior que 50”, “é número primo”, “é múltiplo de 7”, “é número par”.
Os quatro números são: 2, 35, 63, 74. Pede-se: escrever todas as maneiras de construirmos essas fichas.
Resp.
Inicialmente, vejamos que números podemos colocar em cada ficha, tomada isoladamente:
ficha “é maior que 50”: 2, 35
ficha “é número primo”: 35, 63, 74
ficha ” é múltiplo de 7”: 2, 74
ficha “é número par”: 35, 63
Feito isso, façamos a distribuição entre as fichas consideradas como um conjunto e na ordem acima.
Temos 3 maneiras: 2, 35, 74, 63; 2, 63, 74, 35; 35, 74, 2, 63.

Questão 2 -

A figura abaixo é um mapa do rio Pixuleco. Logo depois do ponto A, o Pixuleco se divide em dois canais: o canal do Barba, que escoa 2/3 da água, e o canal do Caroço, que escoa o restante. Adiante, o canal do Barba se divide em três outros, o primeiro deles escoa 1/8 da água do Barba, o segundo escoa 5/8 e o terceiro, que escoa o restante da água, acaba se juntando com o canal do Caroço. Pergunta-se: que percentual da água que o Pixuleco tinha em A chega até B?



Resp. Denotando por a a quantidade de água do Pixuleco no ponto A, temos que o percentual desta água que chega em B é:

$$\frac{a/3+2/8\cdot 2/3a}{a}=\frac{1}{3}+\frac{4}{24}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}=50\%$$

Questão 3 -

Quem dá o maior resultado: 999^2*, ou* 2^{999} *? Justifique sua resposta.*
Resp.
Um valor que é muito útil termos na cabeça (Informática, etc.) é $2^{10}=1024$. Ora,

$$2^{999}>2^{20}=2^{10}\cdot 2^{10}=1024\cdot 1024=1024^2>999^2.$$

Questão 4 -

Das flores do jardim da casa de Ana, 2/5 são tulipas, 1/3 são cravos, 1/10 são violetas e as demais são 120 rosas. Pede-se determinar a quantidade de cada tipo de flor desse jardim.
Resp.
Em óbvia notação, temos: $f=t+c+v+r=\frac{2}{5}f+\frac{1}{3}f+\frac{1}{10}f+120=\frac{12}{30}f+\frac{10}{30}f+\frac{3}{30}f+120=\frac{25}{30}f+120.$
De modo que $f-\frac{25}{30}f=120$, ou seja: $\frac{5}{30}f=120$, logo $f=720$.
Resta vermos como esse total de 720 flores é distribuído entre os tipos de flores do jardim:
tulipas: $\frac{2}{5}\cdot 720=288$; cravos: $\frac{1}{3}\cdot 720=240$; violetas: $\frac{1}{10}\cdot 720=72$; e mais as já sabidas 120 rosas.

Questão 5 -

Qual é o algarismo das unidades do número expresso por 2^{2015} ? Justique sua resposta.

Resp.

Neste Nível 1, aceitamos a seguinte prova empírica:

$2^1 = 2, 2^2 = 4, 2^3 = 8, 2^4 = 16, 2^5 = 32, 2^6 = 64, 2^7 = 128, 2^8 = 256$, etc., de onde *induzimos* que o bloco $(2,4,8,6)$ de último dígitos continua se repetindo infinitamente.

Contudo, uma prova verdadeiramente matemática dessa repetição é preferível e simples. Observemos que podemos ver as potências de 2 como obtidas por sucessivas multiplicações por 2. Com efeito, $2^2 = 2\cdot 2$, $2^3 = 2\cdot 2^2$, $2^4 = 2\cdot 2^3$, $2^5 = 2\cdot 2^4$, etc. Além disso, note que é fácil vermos que o último dígito de um produto $2^{n+1} = 2\cdot 2^n$ é o último digito do produto de 2 pelo último dígito de 2^n. Assim, quando chegamos a $2^4 = 16$, seguirá que o último dígito de 2^5 será o último dígito de $2\cdot 6 = 12$, ou seja: 2; daí, o último dígito de 2^6 será o último de $2\cdot 2 = 4$, ou seja: 4; o último dígito de 2^7 será o último de $2\cdot 4 = 8$, ou seja: 8; o último dígito de 2^8 será o último de $2\cdot 8 = 32$, ou seja: 2; logo, como voltamos ao início do bloco, o processo continua infinitamente.

Resta descobrir qual o último dígito de 2^{2015}. Ora, como $2015 = 4\cdot 503 + 3$, é fácil vermos que até chegarmos à potencia 2015 repetimos 503 vezes o tal bloco $(2,4,8,6)$, e paramos em sua terceira posição, que é ocupada pelo dígito 8. Esta é a resposta.

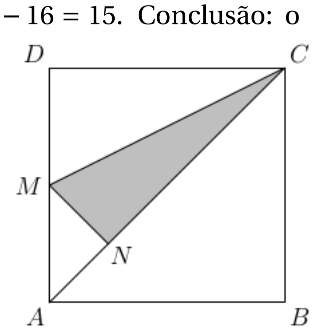
Questão 6 -

Rodrigo teve de fazer a festa de seu aniversário em um salão onde não cabiam mais de 50 convidados. Num dado momento, o DJ animando a festa observou que 3/4 dos meninos estavam dançando com 4/5 das garotas. Pede-se o número de pessoas que estavam dançando naquele momento.

Resp.

Denotemos por c, m, g, respectivamente, o número de convidados, o de meninos e o de garotas. Obviamente: $c = m+g$. Por outro lado, o DJ afirma que $\frac{3}{4}m = \frac{4}{5}g = \frac{4}{5}(c-m)$, de modo que $\frac{3}{4}m+\frac{4}{5}m = \frac{4}{5}c$, e então: $31m = 16c$. Disso segue que c é múltiplo de 31 (use fatoração em números primos dos dois membros e que 31 é primo). Ora, como não podemos ter mais de 50 convidados, segue que $c = 31$. Logo, $31m = 16c$ implica que $m = 16$, e isso mostra que $g = 31 - 16 = 15$. Conclusão: o número de pessoas dançando é $\frac{3}{4}m + \frac{4}{5}g = \frac{3}{4}\cdot 16 + \frac{4}{5}\cdot 15 = 12 + 12 = 24$.

Questão 7 -



Na figura ao lado, ABCD representa um quadrado de área 120 cm^2, M é o ponto médio do segmento AD, e MN é perpendicular a AC.
Determine a área do triângulo sombreado.

Resp.

Denotemos por P o ponto médio do segmento BC. O segmento MP divide o quadrado em dois retângulos de mesma área. Denotemos por O o ponto médio de MP e por Q o ponto médio de AB.
Temos, então, as seguintes igualdades de áreas:

área $(CDM) = \frac{1}{2}$área $(CDMP) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$área $(ABCD) = \frac{1}{4}\cdot 120 = 30$;

área $(ANM) = \frac{1}{4}$área $(AQOM) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}$área $(ABCD) = \frac{1}{16}\cdot 120 = \frac{15}{2}$;

área $(CMN) =$ área $(ACD) -$ área $(CDM) -$ área $(ANM) = 60 - 30 - \frac{15}{2} = 30 - \frac{15}{2} = \frac{45}{2} = 22,5.$

Questão 8 -

Determinar todos os pares (a, b) *de números inteiros positivos verificando:* $a + b + ab = 134$.

Resp.

Suponhamos $a \leqslant b$.

Primeira resolução.

De $a + b + ab = 124$ segue $(1 + a)(1 + b) = 135 = 3^3 \cdot 5 = 3 \cdot 45 = 5 \cdot 27 = 9 \cdot 15$. De modo que, pela unicidade da fatoração em números primos (Teorema Fundamental da Aritmética), temos as seguintes possibilidades:

$1 + a = 3, 1 + b = 45$, logo $a = 2, b = 44$,

$1 + a = 5, 1 + b = 27$, logo $a = 4, b = 26$,

$1 + a = 9, 1 + b = 15$, logo $a = 8, b = 14$.

Segunda resolução.

Descubramos a paridade de a, b. Como 134 é par, a partir de $a + b + ab = 134$, é imediato constatarmos que nenhum dentre a e b pode ser ímpar, ou seja: ambos são inteiros pares.

Descubramos, a seguir, uma delimitação dos valores de a, b. Obviamente, $ab < 134$ e como $11 < \sqrt{134} < 12$, segue que $a \leqslant 11$ (pois, como estamos supondo $a \leqslant b$, a possibilidade $a > 11$ daria $b > 11$ e $ab > 134$).

Resumindo: a, b são pares, $a \leqslant 10$ (pois 11 é ímpar), e $a + b + ab = 134$, ou seja: $b = \frac{134-a}{1+a}$.

Temos, então, as seguintes possibilidades para a: 2, 4, 6, 8 e 10. Para cada uma delas, verifiquemos se o correspondente b é inteiro. A fórmula acima nos dá, respectivamente:

$b = 132/3 = 44, b = 130/5 = 26, b = 128/7, b = 126/9 = 14, b = 124/11$.

Conclusão. As soluções são: $(a, b) = (2, 44), (4, 26), (8, 14)$.