Questões nível 2

Questão 1 -

A venda dos celulares da marca Soxama vem dobrando a cada três anos. Isso corresponde a qual taxa de crescimento anual? Responda em porcentagem arredondada na casa das unidades.

Resp.

Indiquemos por a a taxa anual de crescimento. Um celular que tinha valor V, depois de 3 anos, passará a custar: $(1+a)^3V = 2V$. Logo, $1+a = \sqrt[3]{2} \simeq 1,26$, ou seja: $a \simeq 0,26 = 26\%$.

Questão 2 -

A pizzaria Fiquegordo é frequentada só por garotos, que consomem pizzas em formato de coração e que custam R$ 20. O dono pretende atender também familias, servindo pizzas de mesmo material, espessura e formato, mas 1,5 vezes maiores que as atuais. Calcule o custo das novas pizzas.

Resp.

Como o material é o mesmo, o custo c é proporcional à massa das pizzas, e como elas têm a mesma espessura, a massa é proporcional à área: $c \propto A$. Agora, notemos que há duas interpretações para "1,5 vezes maiores". Vejamos.

– Se tamanho refere-se à área: $A' = 1,5\,A$, daí $c'/c = A'/A = 1,5$ $\therefore$ o novo custo é $c' = 1,5 \times 20 = 30$.

– Se o tamanho refere-se ao diâmetro d (= maior distância entre dois pontos) da pizza: $c \propto A \propto d^2$, e como $d' = 1,5d$, segue que $c'/c = (d'/d)^2 = 1,5^2 = 2,25$, e então o novo custo é $c' = 2,25 \times 20 = 45$.

Questão 3 -

Cada afirmação abaixo refere-se a retângulos não quadrados. *Para cada uma, decida qual a melhor resposta dentre as seguintes alternativas: "sempre vale", "pode valer, mas nem sempre", "nunca vale".*

a). se o perímetro é número racional, então a área também é racional;

b). se o perímetro é número irracional, então a área também é irracional.

Resp.

Denotemos por a, b os lados do retângulo. Simpliquemos a resolução observando que o perímetro $2a+2b$ é racional quando, e só quando, o semiperímetro $a+b$ for racional. O problema, então, consiste em relacionar a racionalidade de $a+b$ com a de ab.

Resp. a): "pode valer, mas nem sempre vale". Com efeito, $a = 2+\sqrt{2}$ e $b = 2-\sqrt{2}$ dão: $a+b = 4 =$ rac e $ab = 4-2 = 2 =$ rac; por outro lado, $a = \sqrt{2}$ e $b = 2-\sqrt{2}$ dão $a+b = 2 =$ rac e $ab = 2\sqrt{2}-2 = 2(\sqrt{2}-1) =$ irrac.

Resp. b): "pode valer, mas nem sempre vale". Com efeito, $a = \sqrt{2}$ e $b = 2\sqrt{2}$ dão $a+b = 3\sqrt{2} =$ irrac e $ab = 4 =$ rac; enquanto que $a = 1+\sqrt{2}$ e $b = \sqrt{2}$ dão $a+b = 1+2\sqrt{2} =$ irrac e $ab = 2+\sqrt{2} =$ irrac.

Questão 4 -

José está lendo uma coleção de livros todos os quais têm o mesmo número de páginas. José observou que lendo 5 páginas por dia, terminou o segundo livro 16 dias antes do tempo que levou para ler o primeiro na base de 3 páginas diárias. Quantas páginas têm esses livros?

Resp.

Sejam p o número de páginas de cada livro, t o tempo para ler um livro à 5 páginas diárias, t' idem a 3 páginas diárias. Temos $5t = p = 3t'$, e $t = t'-16$. Logo, $5(t'-16) = 3t'$, ou seja: $2t' = 80$, de onde segue $t' = 40$, e então $p = 3t' = 3 \times 40 = 120$ páginas.

Questão 5 -

Qual é o algarismo das unidades do número expresso por 2^{2015} *? Justique sua resposta.*

Resp.

Observemos que podemos ver as potências de 2 como obtidas por sucessivas multiplicações por 2. Com efeito, $2^2 = 2\cdot 2$, $2^3 = 2\cdot 2^2$, $2^4 = 2\cdot 2^3$, $2^5 = 2\cdot 2^4$, etc. Além disso, note que é fácil vermos que o último dígito de um produto $2^{n+1} = 2\cdot 2^n$ é o último digito do produto de 2 pelo último dígito de 2^n. Assim, quando chegamos a $2^4 = 16$, seguirá que o último dígito de 2^5 será o último dígito de $2\cdot 6 = 12$, ou seja: 2; daí, o último dígito de 2^6 será o último de $2\cdot 2 = 4$, ou seja: 4; o último dígito de 2^7 será o último de $2\cdot 4 = 8$, ou seja: 8; o último dígito de 2^8 será o último de $2\cdot 8 = 32$, ou seja: 2; logo, como voltamos ao início do bloco, o processo continua infinitamente.

Resta descobrir qual o último dígito de 2^{2015}. Ora, como $2015 = 4\cdot 503 + 3$, é fácil vermos que até chegarmos à potencia 2015 repetimos 503 vezes o tal bloco $(2,4,8,6)$, e paramos em sua terceira posição, que é ocupada pelo dígito 8. Esta é a resposta.

Questão 6 -

É dado um triângulo retângulo ABC *de área 48* cm^2*, retângulo no vértice* A *e cujo cateto AB mede 12 cm. Traçando uma paralela ao cateto AB, dividimos o triângulo ABC em um trapézio e um triângulo pequeno. Determinar o comprimento de todos os lados dessas duas novas figuras quando elas tiverem a mesma área.*

Resp.

Indiquemos por a,b,c o comprimento dos lados opostos aos vértices A,B,C, respectivamente. É dado que $c = 12$, e como $bc/2 = 48$, segue que $b = \frac{2\times 48}{12} = 8$. Além disso, por Pythagoras, temos: $a = \sqrt{b^2+c^2} = \sqrt{12^2+8^2} = \sqrt{144+64} = \sqrt{208}$.

Indiquemos por y o comprimento da base do triângulo pequeno (ela é paralela ao lado AB), e por x o comprimento de seu outro cateto (ele fica sobre BC). Quando as duas novas figuras tiverem área igual, podemos escrever $xy/2 = 24$, ou seja: $xy = 48$. Por outro lado, pela semelhança entre o triângulo grande e o pequeno: $x/y = 8/12$, ou seja: $x = \frac{2}{3}y$. Resumindo: $xy = 48$ e $x = \frac{2}{3}y$.

Substituindo o valor de x, dado pela segunda igualdade, na primeira: $\frac{2}{3}y^2 = 48$, logo $y^2 = 24\cdot 3 = 72$. Consequentemente: $y = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$, e $x = \frac{2}{3}y = \frac{2}{3}\cdot 6\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$. Finalmente, nova aplicação de Pythagoras dá a hipotensusa do triângulo pequeno: $\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{72+32} = \sqrt{104}$.

Dimensões do trapézio são imediatas a partir do já visto.

Questão 7 -

Expressar como uma fração ordinária irredutível o valor da diferença $a-b$*, sabendo que*

$$a = \frac{1^2}{1} + \frac{2^2}{3} + \frac{3^2}{5} + \cdots + \frac{50^2}{99}, \qquad b = \frac{1^2}{3} + \frac{2^2}{5} + \frac{3^2}{7} + \cdots + \frac{50^2}{101}\cdot$$

Resp.

Juntando parcelas de mesmo denominador, e usando a identidade básica: $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$, temos:

$$\begin{aligned}
a-b &= 1 + \frac{2^2-1^2}{3} + \frac{3^2-2^2}{5} + \frac{4^2-3^2}{7} + \cdots + \frac{50^2-49^2}{99} - \frac{50^2}{101}\\
&= 1 + \frac{(2-1)(2+1)}{3} + \frac{(3-2)(3+2)}{5} + \frac{(4-3)(4+3)}{7} + \cdots + \frac{(50-49)(50+49)}{99} - \frac{2500}{101}\\
&= 1 + (2-1) + (3-2) + (4-3) + \cdots + (50-49) - \frac{2500}{101}\\
&= 1 + 49 - \frac{2500}{101} = 50 - \frac{2500}{101} = \frac{5050-2500}{101} = \frac{2550}{101}\cdot
\end{aligned}$$

Resta mostrarmos que a última fração acima é irredutível. Para tal, observemos que 101 é primo e que o numerador tem a fatoração em primos $2550 = 2\cdot 3\cdot 5\cdot 17$. Logo, como numerador e denominador não têm fatores primos em comum, a fração é irredutível.

Questão 8 -

Considere todos os pares de frações ordinárias irredutíveis *e da forma* $a/600$ *e* $b/700$. *Escrevendo a soma* $a/600+b/700$ *como fração ordinária, qual o menor denominador que podemos encontrar?*

Resp.

Indicando por r o resultado da soma dessas frações, temos:

$$r=\frac{a}{600}+\frac{b}{700}=\frac{700a+600b}{600\cdot 700}=\frac{7a+6b}{6\cdot 700}=\frac{7a+6b}{2^3\cdot 3\cdot 5^2\cdot 7}.$$

Como $600=2^2{\cdot}3{\cdot}5^2$ e como $a/600$ é suposta ser irredutível, é proibido tomar um valor de a divisível por algum dentre 2, 3, 5. Conclusão: $7a$ é divisível por 7, mas por nenhum dentre 2, 3, 5.

Por sua vez, como $700=2^2\cdot 5^2\cdot 7$, a irredutibilidade de $b/700$ implica que b não pode ser divisível por algum dentre 2, 5, 7. Conclusão: $6b$ é divisível por 2, mas por nenhum dentre 5, 7.

Essas duas conclusões mostram que é impossível $7a+6b$ ser divisível por algum dentre 2, 3, 7. Ora, isso mostra que existem apenas três possibilidades para o resultado da soma

$$r=\frac{a}{600}+\frac{b}{700}=\frac{7a+6b}{2^3\cdot 3\cdot 5^2\cdot 7}=\frac{7a+6b}{168\cdot 5^2},$$

elas são as frações irredutíveis da forma: $r=\frac{c}{168}$, $r=\frac{c'}{168\cdot 5}$, e $r=\frac{c''}{168\cdot 5^2}$.

Resta mostrarmos que a primeira possibilidade realmente ocorre. Com efeito, tomando $a=1, b=3$:

$$r=\frac{7a+6b}{2^3\cdot 3\cdot 5^2\cdot 7}=\frac{7+18}{2^3\cdot 3\cdot 5^2\cdot 7}=\frac{5^2}{2^3\cdot 3\cdot 5^2\cdot 7}=\frac{1}{8\cdot 3\cdot 7}=\frac{1}{168}.$$

Conclusão final: o menor denominador é 168.