Questões nível 3

Questão 1 -

A venda dos celulares da marca Soxama vem dobrando a cada três anos. Isso corresponde a qual taxa de crescimento anual? Responda em porcentagem arredondada na casa das unidades.

Resp.

Indiquemos por a a taxa anual de crescimento. Um celular que tinha valor V, depois de 3 anos, passará a custar: $(1+a)^3V = 2V$. Logo, $1+a = \sqrt[3]{2} \simeq 1,26$, ou seja: $a \simeq 0,26 = 26\%$.

Questão 2 -

A pizzaria Fiquegordo é frequentada só por garotos, que consomem pizzas em formato de coração e que custam R$ 20. O dono pretende atender também familias, servindo pizzas de mesmo material, espessura e formato, mas 1,5 vezes maiores que as atuais. Calcule o custo das novas pizzas.

Resp.

Como o material é o mesmo, o custo c é proporcional à massa das pizzas, e como elas têm a mesma espessura, a massa é proporcional à área: $c \propto A$. Agora, notemos que há duas interpretações para "1,5 vezes maiores". Vejamos.

– Se tamanho refere-se à área: $A' = 1,5\,A$, daí $c'/c = A'/A = 1,5$ $\therefore$ o novo custo é $c' = 1,5 \times 20 = 30$.

– Se o tamanho refere-se ao diâmetro d (= maior distância entre dois pontos) da pizza: $c \propto A \propto d^2$, e como $d' = 1,5d$, segue que $c'/c = (d'/d)^2 = 1,5^2 = 2,25$, e então o novo custo é $c' = 2,25 \times 20 = 45$.

Questão 3 -

Cada afirmação abaixo refere-se à circunferência e à área de um mesmo círculo. Para cada uma, decida qual a melhor resposta dentre as seguintes alternativas: "sempre vale", "pode valer, mas nem sempre vale", "nunca vale". Justifique todas as afirmações que fizer, mas considere sabido que π e $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ são números irracionais.

a). se a circunferência é número racional, então a área também é racional;

b). se a circunferência é número irracional, então a área também é irracional.

Resp.

Simpliquemos a resolução observando que a circunferência $2\pi R$ é racional quando, e só quando, a semicircunferência πR for racional, onde R denota o raio. O problema, então, consiste em relacionar a racionalidade de πR com a de πR^2.

Resp. a): "nunca vale". Com efeito, se $\pi R = r =$ rac, então $\pi R^2 = \pi \cdot r^2/\pi^2 = r^2/\pi =$ rac/irrac = irrac.

Resp. b): "pode valer, mas nem sempre vale". Com efeito, $R = 1$ dá $\pi R = \pi =$ irrac, e $\pi R^2 = \pi =$ irrac.; enquanto que $R = 1/\sqrt{\pi}$ dá $\pi R = \sqrt{\pi} =$ irrac (pois se $\sqrt{\pi} = r =$ rac, então teríamos $\pi = r^2 =$ rac), mas $\pi R^2 = \pi/\pi = 1 =$ rac.

Questão 4 -

Um caminhoneiro anda a 60 km/h em subidas, a 90 km/h em descidas e a 72 km/h nos demais trechos de sua viagem. Ele gastou 5 horas para ir do ponto A ao ponto B, e 4 horas para voltar de B para A. Qual o comprimento do trajeto entre esses dois pontos?

Resp.

Ao viajar de A para B, indiquemos por s, d, h o comprimento total do trajeto em subidas, descidas e na horizontal, respectivamente. Agora, cuide que na viagem de B para A, esses comprimentos ficam d, s, h, respectivamente. Também note que a questão pede o valor da soma $s + d + h$.

Usando que tempo = (distância viajada)/velocidade, podemos escrever o seguinte:
– quando $A \to B$: $\quad 5 = t_{sub} + t_{desc} + t_{hor} = s/60 + d/90 + h/72$,
– quando $B \to A$: $\quad 4 = t_{desc} + t_{sub} + t_{hor} = s/90 + d/60 + h/72$.
Simplificando denominadores, temos duas equações:

$$\tfrac{3}{2}s + d + \tfrac{5}{4}h = 450, \quad s + \tfrac{3}{2}d + \tfrac{5}{4}h = 360.$$

Agora, temos de atinar que são duas equações, mas três incógnitas, o que torna problemático acharmos os valores de s, d, h. Contudo, lembremos que somente precisamos determinar o valor da sua soma: $s + d + h$. Vejamos duas maneiras de conseguir isso.
Ideia do aluno Guilherme Kowalczuk:
Somando as equações: $\frac{5}{2}s + \frac{5}{2}d + \frac{5}{2}h = 810$, logo $s + d + h = 324$.
Ideia da aluna Ana Paula Schuch:
Subtraindo a segunda da primeira equação, obtemos: $s/2 - d/2 = 90$, ou seja $s = d + 180$. Substituindo este valor de s na primeira equação, obtemos: $\frac{3}{2}(180 + d) + d + \frac{5}{4}h = 450$, o que se simplifica para $\frac{5}{2}d + \frac{5}{4}h = 180$, ou seja: $h = 144 - 2d$. Finalmente,

$$s + d + h = (180 + d) + d + (144 - 2d) = 324.$$

Observação: alguns alunos procuraram resolver o problema por tentativas, experimentando sucessivos valores de s, d, h. Ora, além de isso ser um procedimento pouco matemático, não garante que exista mais de uma soma $s + d + h$ válida.

Questão 5 -

Seja f uma função real de variável real que tem as seguintes propriedades:

$$f(1) = 7 \ \text{e} \ f\big(x \cdot f(y)\big) = x \cdot f\big(f(y)\big), \ \textit{para todos os reais positivos } x \text{ e } y.$$

Pede-se expressar o valor de $f(2015)$ como um número inteiro.
Resp.
Fazendo $y = 1$, obtemos $f(7x) = f(x7) = f\big(x \cdot f(1)\big) = xf\big(f(1)\big) = xf(7)$. Logo, $f(x) = f(7 \cdot x/7) = x/7 \cdot f(7) = x f(7)/7$, ou seja: existe uma constante $a = f(7)/7$ tal que $f(x) = ax$, para todos os x. Ora, de $f(1) = 7$ tiramos $7 = f(1) = a \cdot 1 = a$, logo $f(x) = 7x$, para todos os x. Em particular: $f(2015) = 7 \cdot 2015 = 14\,105$.
Observação: alunos que afirmaram $f(x) = 7x$ sem justificativa perderam pontos.

Questão 6 -

a). Expressar $1 + x^2 + x^4$ como o produto de dois fatores quadráticos.
b). Expressar como fração ordinária irredutível o valor da soma:

$$\frac{1}{1 + 1^2 + 1^4} + \frac{2}{1 + 2^2 + 2^4} + \frac{3}{1 + 3^2 + 3^4} + \cdots + \frac{2015}{1 + 2015^2 + 2015^4}.$$

Resp.
a). Usemos, em sequência, as identidades básicas $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ e $u^2 - v^2 = (u - v)(u + v)$. Assim: $1 + x^2 + x^4 = 1 + 2x^2 + x^4 - x^2 = (1 + x^2)^2 - x^2 = (1 + x^2 - x)(1 + x^2 + x) = (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$.
b). Fazendo $a = x^2 + 1$ e $b = x$, vemos que $1 + x^2 + x^4 = (a - b)(a + b)$, ora:

$$\frac{1}{a-b} + \frac{1}{a+b} = \frac{2a}{(a-b)(a+b)} \ \text{e} \ \frac{1}{a-b} - \frac{1}{a+b} = \frac{2b}{(a-b)(a+b)},$$

de modo que a segunda delas nos permite escrever cada parcela da soma do problema como

$$\frac{x}{1+x^2+x^4} = \frac{x}{(x^2+1-x)(x^2+1+x)} = \frac{1}{2} \cdot \Big(\frac{1}{x^2+1-x} - \frac{1}{x^2+1+x}\Big) = \frac{1}{2} \cdot \Big(\frac{1}{x^2-x+1} - \frac{1}{x^2+x+1}\Big) = \frac{1}{2} \cdot \Big(\frac{1}{1+x(x-1)} - \frac{1}{1+x(x+1)}\Big).$$

Consequentemente, indicando por s o valor da soma a calcular, temos:

$$\begin{aligned}
2s &= \left(\tfrac{1}{1+1(1-1)} - \tfrac{1}{1+1(1+1)}\right) + \left(\tfrac{1}{1+2(2-1)} - \tfrac{1}{1+2(2+1)}\right) + \left(\tfrac{1}{1+3(3-1)} - \tfrac{1}{1+3(3+1)}\right) + \cdots + \left(\tfrac{1}{1+2015(2015-1)} - \tfrac{1}{1+2015(2015+1)}\right)\\
&= \left(\tfrac{1}{1+1(0)} - \tfrac{1}{1+1(2)}\right) + \left(\tfrac{1}{1+2(1)} - \tfrac{1}{1+2(3)}\right) + \left(\tfrac{1}{1+3(2)} - \tfrac{1}{1+3(4)}\right) + \cdots + \left(\tfrac{1}{1+2015(2014)} - \tfrac{1}{1+2015(2016)}\right)\\
&= \tfrac{1}{1+1(0)} - \tfrac{1}{1+2015(2016)} = 1 - \tfrac{1}{1+2015\cdot 2016} = \tfrac{2015\cdot 2016}{1+2015\cdot 2016}.
\end{aligned}$$

Como a última fração é irredutível (pois da forma n/n+1), segue que o valor da soma, expresso como fração irredutível, é dado por: $s = \frac{2015\cdot 1008}{1+2015\cdot 2016} = \frac{2\,031\,120}{4\,062\,241}$.

Questão 7 -

Desde o ano 2000, o Bomópio Futebol Club anualmente pede uma ajuda financeira extra a seus torcedores para pagar os salários de primeiro mundo dos jogadores. O club verificou que a probabilidade de um torcedor contribuir num ano é de 90 % se *ele contribuiu no ano anterior, e de 40 %* desde que *ele não tenha contribuído no ano anterior. Pede-se:*

a). sendo $c(n)$ a probabilidade de um torcedor contribuir no n-ésimo ano dessa campanha, relacionar $c(n+1)$ com $c(n)$;

b). supondo que o torcedor Zotário tenha contribuído no ano 2000, calcular a probabilidade de ele contribuir no ano 2015. Responda em porcentagem arredondada na casa das unidades.

Resp.
Notação: início da campanha (ano 2000): n=0; os valores seguintes: $n = 1, 2, 3, \ldots, 15$ correspondem aos anos $2001, 2002, 2003, \ldots, 2015$.
Resp. a). $c(n+1) = 0,9\cdot c(n) + 0,4\cdot(1-c(n)) = 0,4 + 0,5\,c(n) = 0,4 + \frac{1}{2}c(n)$.
Resp. b). Como $c(0) = 1$, desenrolando a recorrência acima obtemos, sucessivamente:
$c(1) = 0,4 + \frac{1}{2}c(0) = 0,4 + \frac{1}{2}$
$c(2) = 0,4 + \frac{1}{2}c(1) = 0,4 + \frac{1}{2}\cdot(0,4 + \frac{1}{2}) = 0,4 + 0,4\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}$
$c(3) = 0,4 + \frac{1}{2}c(2) = 0,4 + \frac{1}{2}\cdot\left(0,4 + 0,4\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}\right) = 0,4 + 0,4\cdot\frac{1}{2} + 0,4\cdot\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3}$
de modo que uma indução imediata nos permite escrever:

$$c(n) = 0,4\left(1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2^2} + \cdots + \tfrac{1}{2^{n-1}}\right) + \tfrac{1}{2^n} \quad \therefore \quad c(15) = 0,4\left(1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2^2} + \cdots + \tfrac{1}{2^{14}}\right) + \tfrac{1}{2^{15}}\cdot$$

Somando a PG de razão 1/2, obtemos

$$c(15) = \tfrac{1}{2^{15}} + 0,4\cdot\tfrac{1-1/2^{15}}{1/2} = \tfrac{1}{2^{15}} + 0,8\cdot\left(1 - \tfrac{1}{2^{15}}\right) = 0,8 + \tfrac{0,2}{2^{15}}\cdot$$

Resta calcular o valor de $c(15)$ arredondado na casa das unidades. Afirmo que $c(15) \simeq 0,80 = 80\%$. Para provar isso, basta mostrar que $0,2/2^{15} < 0,001$, ou seja que $200 < 2^{15}$. Ora, isso é óbvio, pois é bastante sabido que $2^{10} = 1024$.

Questão 8 -

Considere a função de variável real e valores reais definida por $f(x) = x - \dfrac{12}{x-4} + \sqrt{\dfrac{x+4}{x-4}}$.
a). Determinar o domínio dessa função.
b). Determinar todas as intersecções do gráfico cartesiano de $y = f(x)$ com a reta $y = -4$.
Resp. a).
Como estamos lidando com uma função real de variável real, seu domínio fica determinado pelas exigências: $x \neq 4$ e $\frac{x+4}{x-4} \geqslant 0$. Ora, todo $x > 4$ verifica $x + 4 > 0$ e $x - 4 > 0$, logo $(x+4)/(x-4) > 0$. Por outro lado, entre os $x < 4$, como todos eles dão $x-4 < 0$, a única maneira de termos $(x+4)/(x-4) \geqslant 0$ é com $x + 4 \geqslant 0$, ou seja $x \geqslant -4$. Resumindo:
o domínio $\mathscr{D}$ dessa função é o conjunto de todos os $x > 4$ e mais todos os $x \leqslant -4$.

Resp. b).

O problema equivale a achar todas as raízes $x \in \mathscr{D}$ da equação

$$x - \frac{12}{x-4} + \sqrt{\frac{x+4}{x-4}} = -4 \iff x+4+\sqrt{\frac{x+4}{x-4}} = \frac{12}{x-4} \iff (x^2-16)+(x-4)\sqrt{\frac{x+4}{x-4}} = 12\,.$$

– Busca das raízes com $x > 4$.

Para tais x temos que $x-4 = \sqrt{(x-4)^2}$, de modo que podemos simplificar a (última) equação:

$$(x^2-16)+(x-4)\sqrt{\tfrac{x+4}{x-4}} = 12 \iff (x^2-16)+\sqrt{\tfrac{(x-4)^2\,(x+4)}{x-4}} = 12 \iff (x^2-16)+\sqrt{x^2-16} = 12\,.$$

Ora, esta última é uma equação quadrática na incógnita $y = \sqrt{x^2-16}$, sendo que y é positiva para todos os $x > 4$. Aplicando Bhaskara em $y^2+y=12$, obtemos como única raiz $y=3$, pois $y=-4$ não é positivo. Assim que $\sqrt{x^2-16}=3$, logo $x^2=25$, e então $x=5$ (descarte $x=-5$, pois estamos trabalhando com $x>4$). Resumindo, para $x>4$, a equação tem uma única raiz: $x=5$.

– Busca das raízes com $\leqslant -4$.

Como já fizemos no caso anterior, usaremos que $\sqrt{a^2} = |a|$, para todos os números reais a. Daí, como cada real $a<0$ pode ser escrito como $a=-|a|$, segue que para todos os $x \leqslant -4$ temos que $x-4 = -\sqrt{(x-4)^2}$, de modo que podemos simplificar a (última) equação do seguinte modo:

$$(x^2-16)+(x-4)\sqrt{\tfrac{x+4}{x-4}} = 12 \iff (x^2-16)-\sqrt{\tfrac{(x-4)^2\,(x+4)}{x-4}} = 12 \iff (x^2-16)-\sqrt{x^2-16} = 12\,.$$

Ora, esta última é uma equação quadrática na incógnita $y=\sqrt{x^2-16}$, sendo que $y \geqslant 0$ para todos os $x \leqslant -4$. Aplicando Bhaskara em $y^2-y=12$, obtemos como única raiz $y=4$, pois $y=-3$ é negativa. Assim que $\sqrt{x^2-16}=4$, logo $x^2=32$, e então $x=-\sqrt{32}$ (descarte $x=\sqrt{32}$, pois estamos trabalhando com $x \leqslant -4$; ademais, observe que efetivamente $-\sqrt{32} = -4\sqrt{2} \leqslant -4$)). Resumindo, para $x \leqslant -4$, a equação tem uma única raiz: $x=-4\sqrt{2}$.

Conclusão final: as únicas raízes da equação do problema são $x=5$ e $x=-4\sqrt{2}$. Consequentemente, os pontos de intersecção dos gráficos de $y=f(x)$ e de $y=-4$ são:

$$\big(5, f(5)\big) = (5,-4) \quad \text{e} \quad \big(-4\sqrt{2}, f(-4\sqrt{2})\big) = (-4\sqrt{2},-4).$$