Nível 2

Problema 1 -

Temos três números com as seguintes duas propriedades: vale 243 o produto do segundo pelo quadrado do primeiro e pelo cubo do terceiro; por outro lado, o produto do primeiro pelo quadrado do segundo vale 81. Pede-se calcular o valor do produto *desses três números.*

Sol.

Indicando por a, b, c tais números, podemos escrever: $a^2bc^3 = 243$ e $ab^2 = 81$. Multiplicando: $a^2bc^3 \times ab^2 = a^3b^3c^3 = 243 \times 81 = 3 \times 81 \times 81 = 3 \times 9^2 \times 9^2 = 3 \times 3^4 \times 3^4 = 3^9$, de modo que $abc = 3^3 = 27$.

Problema 2 -

Tomando a, b, c, d quatro dígitos todos distintos do zero, formemos os números cuja representação decimal são dadas por $abcd$ e $dcba$. Mostre que, sempre que escolhermos os dígitos dessa maneira, a soma $abcd + dcba$ é divisível por 11.

Sol.

Pela definição de representação decimal de números inteiros, temos:

$$abcd + dcba = (1000a + 100b + 10c + d) + (1000d + 100c + 10b + a) = 2002(a + d) + 220(b + c).$$

Resta observar que tanto 2002 como 220 são divisíveis por 11.

Problema 3 -

A tela dos televisores antigos tem lados na razão 4:3, e nos televisores modernos a razão dos lados é de 16 para 9. Tem-se um vídeo que preenche completamente a tela de um televisor moderno mas que num televisor antigo, quando se ajusta perfeitamente a imagem na largura da tela, deixa sobrando espaço na vertical da tela. Calcular o percentual de tela não usado pelo televisor antigo.

Sol.

Indiquemos por h a altura da faixa ocupada pelo vídeo no TV antigo. Temos que $\frac{h}{4} = \frac{9}{16}$, de modo que $h = \frac{9}{4}$. Então, a área da parte não usada vale $(3 - \frac{9}{4}) \times 4 = 3$. Ora, essa área vale $\frac{3}{4\times 3} = 0.25 = 25\%$ da área da tela do TV antigo.

Problema 4 -

Um homem penetrou no pomar do rei e roubou algumas frutas. Para sair do pomar, precisou passar por três portões, cada um dos quais tinha um guarda. Subornou o primeiro deles lhe dando a metade das frutas que tinha e mais duas, fez o mesmo com o segundo guarda e depois com o terceiro. Sendo que ele saiu do pomar com apenas uma fruta, quantas tinha roubado?

Sol.

Indiquemos por x o número de frutas roubadas.

Após o primeiro guarda, sobraram $x - \left(2 + \frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2} - 2 = \frac{x-4}{2}$ frutas;

após o segundo guarda, sobraram $\frac{x-4}{2} - \left(2 + \frac{x-4}{4}\right) = \frac{x-4}{4} - 2 = \frac{x-12}{4}$ frutas;

após o terceiro guarda, sobraram $\frac{x-12}{4} - \left(2 + \frac{x-12}{8}\right) = \frac{x-12}{8} - 2 = \frac{x-28}{8}$ frutas.

Temos então que $1 = \frac{x-28}{8}$, de modo que $x = 8 + 28 = 36$ frutas.

Comentário.

A grande maioria dos alunos deu uma resolução aritmética, resolvendo o problema do terceiro para o primeiro guarda. Por exemplo, se depois do terceiro guarda saiu com 1 fruta, quando chegou nele tinha 6 frutas (pois deu 3 mais 2). Quando chegou no segundo tinha 16 e quando chegou no primeiro tinha 36. Determinaram esses valores por tentativas. Contudo, podemos dar um tratamento mais algébrico para esse modo de pensar. Com efeito, isso equivale a dizer que se saiu com y frutas depois de um guarda, quando nele chegou tinha uma quantidade z de frutas tal que $z-(z/2+2) = y$, de modo que $z/2 = y+2$, ou $z = 2(y+2)$. Daí, $y = 1$ dá $z = 6$, e $y = 6$ dá $z = 16$, e finalmente $y = 16$ dá $z = 36$.

Problema 5 -

Determinar o dígito das unidades dos números x e y que são expressos por $x = 2016^2 + 2^{2016}$ e $y = x^2$. Justifique sua resposta.

Sol.

É imediato se ver que, a medida que n vai crescendo, o dígito das unidades de 2^n vai percorrendo o ciclo $2, 4, 8, 6$; como $2016 = 4 \times 504$, disso segue que o dígito das unidades de 2^{2016} é 6. Por outro lado, é imediato que o dígito das unidades de 2016^2 também é 6, consequentemente o dígito das unidades de x é o dígito das unidades de $6+6$, ou seja é 2. Disso fica imediato ver que o dígito das unidades de x^2 é 4.

Problema 6 -

Seja a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que verifica $f(x/3) = x^2 + x + 1$, para todos os $x \in \mathbb{R}$. Pede-se o valor numérico da soma de todos os $y \in \mathbb{R}$ verificando $f(3y) = 7$.

Sol.

Temos $f(3y) = f(\frac{9y}{3}) = (9y)^2 + (9y) + 1 = 7$. Colocando $u = 9y$, temos $u^2 + u - 6 = 0$, a qual tem raízes: $u = -3$ (que corresponde a $y = -3/9 = -1/3$), e $u = 2$ (que corresponde a $y = 2/9$). Conclusão: a soma pedida vale $-1/3 + 2/9 = -1/9$.

Problema 7 -

Um certo triângulo retângulo tem perímetro 32 e área 20. Determinar o valor de sua hipotenusa.

Sol.

Indiquemos por a, b, c os comprimentos dos lados do triângulo e onde c é o da sua hipotenusa. Os dados do problema e Pythagoras nos permitem escrever as equações:

$$a + b + c = 32, \quad ab = 40, \quad c^2 = a^2 + b^2.$$

Por um lado, $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + b^2 + 2ab = c^2 + 80$.

Por outro lado, $(a+b)^2 = (32-c)^2 = 1024 - 64c + c^2$.

Disso segue que $c^2 + 80 = 1024 - 64c + c^2$, logo $64c = 1024 - 80 = 944$. Conclusão: $c = 944/64 = 59/4$.

Problema 8 -

Temos seis números inteiros ordenados em valor crescente e tais que, a partir do terceiro, cada um é o produto dos dois anteriores. Sabendo que o primeiro desses números é igual a 2 e o sexto vale 6075000, mostre que é possível determinar os outros quatro a partir da fatoração prima do sexto.

Sol.

Sejam $2, a, b, c, d, 607500$. Temos: $b = 2a$, $c = ab = 2a^2$, $d = bc = 4a^3$, $6075000 = 8a^5 = 2^3 a^5$. Então, a partir da fatoração em primos $6075000 = 2^3 \cdot 3^5 \cdot 5^5$, deduzimos que $a^5 = 3^5 \cdot 5^5$, logo $a = 15$, $b = 30$, $c = 450$ e $d = 13500$.