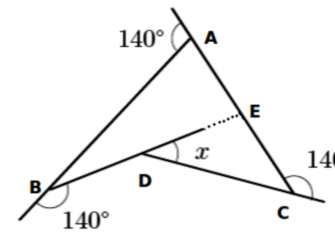
Nível 1

Problema 1 -



Determine o valor em graus do ângulo x da figura ao lado.

Resp.

$\widehat{EAB} = \widehat{ABE} = \widehat{DCE} = 180° - 140° = 40°$. Por outro lado, no triângulo ABE: $\widehat{BEA} = 180° - (\widehat{EAB} + \widehat{ABE}) = 180° - 80° = 100°$. Disso segue: $\widehat{CED} = 180° - 100° = 80°$. Então o triângulo EDC nos dá: $x = 180° - (\widehat{CED} + \widehat{DCE}) = 180° - 120° = 60°$.

Problema 2 -

No mês de agosto, na fatura do consumo mensal de água da loja de José estava escrito:

Valor do consumo = R$ 4860, imposto = R$ 729, total a pagar = R$ 5589.

Como a loja nunca gastou mais de R$ 4000, José foi reclamar na prefeitura. Lá lhe reajustaram o total a pagar para R$ 3979. Sabendo que o imposto é um percentual do consumo e fixo por lei, pede-se calcular na nova fatura o valor em reais do consumo e do imposto.

Resp.

Temos: $c = 4860, i = 729, T = 5589$, de modo que o percentual de imposto é $729/4860 = 0,15 = 15\%$. Então: $T' = 3979 = c' + i' = c' + 0,15c' = 1,15c'$, e assim: $c' = 3979/1,15 = 3460$, e $i' = 0,15c' = 579$.

Problema 3 -

Na igualdade abaixo, x, y, z são números inteiros positivos:

$$\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} + \frac{1}{x+y+z-2} = 1.$$

a). Determinar todos os $x, y, z \geqslant 2$ verificando essa igualdade.
b). Determinar todos os $x, y, z \geqslant 1$ verificando essa igualdade.

Resp.

a). Quando $x, y, z \geqslant 2$ é imediato vermos que $x = y = z = 2$ é uma solução. A dificuldade do problema está em mostrar que não existe outra solução com $x, y, z \geqslant 2$. Para isso é suficiente observar que se ao menos uma dentre essas variáveis for maior do que 2, então a soma fica menor do que um. Com efeito, por exemplo, se $x > 2$ e $y, z \geqslant 2$, então $x + y > 4$, logo $\frac{1}{x+y} < 1/4$ e semelhantemente $\frac{1}{x+z} < 1/4$, logo $\frac{1}{x+y} + \frac{1}{z+x} < 1/2$, e vemos que para que a soma das quatro frações valha um é preciso que a soma das duas últimas seja maior do que $1/2$. Contudo, o maior valor que $\frac{1}{y+z}$ pode ter é $1/4$ (quando $y = z = 2$) e, neste caso, teríamos $x + y + z - 2 = x + y > 4$, de modo que a última fração fica menor do que $1/4$, logo a maior soma das duas últimas é menor do que $1/4 + 1/4 = 1/2$, e não maior do que $1/2$.

(Verifique um exemplo: $x = 3, y = z = 2$, o que dá $\frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = 0,2 + 0,25 + 0,2 + 0,2 < 1$.)

b). Afirmação: quando $x, y, z \geqslant 1$ não existem outras soluções além das determinadas acima. Observe que a simetria do problema nos permite supor que $x \leqslant y \leqslant z$. Daí, para provar a *inexistência* de novas soluções, basta mostrar que se $1 = x \leqslant y \leqslant z$, então a soma das quatro frações será diferente de um, ou seja que:

$$\frac{1}{1+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{1+z} + \frac{1}{y+z-1} \neq 1.$$

Por outro lado, para provar isso, observe que basta estudarmos apenas três possibilidades: $(x = 1, y = 1, z \geqslant 1)$, $(x = 1, y = 2, z \geqslant 2)$, e $(x = 1, y, z \geqslant 3)$.

– *Possibilidade $(x = 1, y, z \geqslant 3)$.*

Temos $1 + y \geqslant 4, 1 + z \geqslant 4, y + z \geqslant 6, y + z - 1 \geqslant 5$, de modo que:

$$\frac{1}{1+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{1+z} + \frac{1}{y+z-1} \leqslant \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{26}{30} < 1.$$

– *Possibilidade* $(x = 1, y = 2, z \geqslant 3)$.

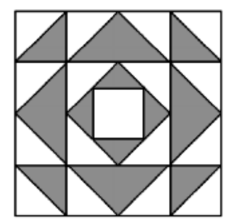
$$\frac{1}{3}+\frac{1}{2+z}+\frac{1}{1+z}+\frac{1}{z+1}=1\,?\text{ ou }\frac{1}{2+z}+\frac{2}{1+z}=\frac{2}{3}\,?\text{ ou }\frac{5+3z}{(1+z)(2+z)}=\frac{2}{3}\,?$$

Isso é o mesmo que perguntar se $15+9z = 2(2+z+2z+z^2)$, ou se existe algum inteiro $z \geqslant 3$ tal que $11+3z = 2z^2$. Ora, o rápido crescimento dos quadrados determina que:
para $z = 3$ temos $11+3z > 2z^2$, mas para $z \geqslant 4$: $11+3z < 2z^2$. Resumindo: não temos soluções neste caso.

– *Possibilidade* $(x = 1, y = 1, z \geqslant 1)$.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{1+z}+\frac{1}{z+1}+\frac{1}{z}=1\,?\text{ ou }\frac{2}{1+z}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}\,?\text{ ou }\frac{1+3z}{z(1+z)}=\frac{1}{2}\,?$$

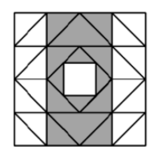
Isso é o mesmo que perguntar se $2+6z = z+z^2$, ou se existe algum inteiro $z \geqslant 1$ tal que $2+5z = z^2$. Ora, substituindo valores numéricos, vemos que:
para $z = 1,2,3,4,5$ temos $2+5z > z^2$, mas para $z \geqslant 6$: $2+5z < z^2$. Resumindo: também neste caso, não temos soluções.



Problema 4 -

A figura ao lado é um quadrado cuja área vale 16 cm^2. Pede-se calcular a área da região sombreada.

Resp.



Reposicionando os triângulos sombreados, obtemos a figura ao lado. Como o quadradinho interno tem lado unitário, vemos que a área da região sombreada vale $2\times 4 - 1\times 1 = 7$.

Problema 5 -

Calcular a soma dos dígitos do número inteiro que vale $10^{2017} - 21$.

Resp.

A representação decimal de 10^{2017} é um número da forma $1000\ldots0$ onde temos 2017 dígitos zero. A partir disso, é imediato vermos que $10^{2017} - 21$ é o número $999\ldots79$, onde existem 2015 dígitos nove. Consequentemente, a soma pedida vale: $2015\times 9 + 7 + 9 = 2016\times 9 + 7 = 18144 + 7 = 18151$.

Problema 6 -

Sabemos que os números a, b, c, d verificam $a-1 = b+1 = c-2 = d+4$. Pede-se determinar o maior deles. Justifique sua resposta.

Resp.

Temos $a = b+2, c = b+3, d = b-3$, de modo que evidentemente c é o maior deles.

Problema 7 -

Maria determinou todos os pares (a, b) de números inteiros positivos onde a é um número de 3 dígitos, b tem 2 dígitos e a diferença $a-b$ vale 985. Qual desses pares tem a maior soma $a+b$?

Resp.

Temos que $b \geqslant 10$ e que $a-b = 985$, de modo que $a = 985+b \geqslant 995$. Assim, vemos que os possíveis pares de Maria são: $(a,b) = (995,10), (996,11), (997,12), \ldots, (999,14)$. É imediato vermos que é o último quem dá a maior soma: $999+14 = 1013$.

Problema 8 -

Considere o número de 8080 dígitos que se forma justapondo o bloco de dígitos 2025 um total de 2020 vezes: $202520252025\ldots 2025$. *Qual o menor divisor (maior do que um) deste número?*
Justifique sua resposta.
Resp.
Indiquemos por N o número que foi construído. Como 2025 divide N, e 3 divide 2025 (pois $2025/3 = 675$), segue que 3 é divisor de N. Ora, como N é ímpar, 2 não é seu divisor, logo o menor divisor é 3.
Observação.
A grande maioria dos alunos resolveu este problema usando o conhecido critério da divisibilidade por 3 que se aprende na Escola. Como a soma dos dígitos de 2025 vale 9, a soma dos dígitos de N vale 2020×9, um resultado que é divisível por 3, logo, por tal critério, N também é divisível por 3.