ORMGrande PoA/2017

Olimpíada Regional de Matemática da Grande Porto Alegre

Nível 2

Problema 1 -

Sendo n número inteiro, escrever como fração ordinária irredutível o valor de $\dfrac{4^{n+4}-4\times 4^n}{4\times 4^{n+3}}$.

Resp.

$$\frac{4^{n+4}-4\times 4^n}{4\times 4^{n+3}}=\frac{4^n(4^4-4)}{4\times 4^3\times 4^n}=\frac{4^4-4}{4\times 4^3}=\frac{4(4^3-1)}{4\times 4^3}=\frac{4^3-1}{4^3}=\frac{63}{64}$$

Problema 2 -

No mês de agosto, na fatura do consumo mensal de água da loja de José estava escrito:

Valor do consumo = R\$ 4860, imposto = R\$ 729, total a pagar = R\$ 5589.

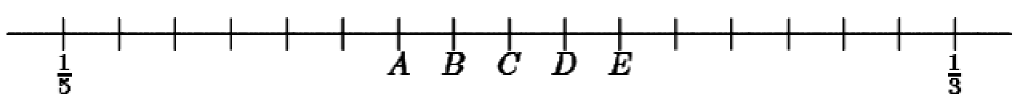
Como a loja nunca gastou mais de R\$ 4000, José foi reclamar na prefeitura. Lá lhe reajustaram o total a pagar para R\$ 3979. Sabendo que o imposto é um percentual do consumo e fixo por lei, pede-se calcular na nova fatura o valor em reais do consumo e do imposto.

Resp.

Temos: $c=4860$, $i=729$, $T=5589$, de modo que o percentual de imposto é $729/4860=0,15=15\%$.
Então: $T'=3979=c'+i'=c'+0,15c'=1,15c'$, e assim: $c'=3979/1,15=3460$, e $i'=0,15c'=579$.

Problema 3 -

A figura abaixo representa a reta numérica, e nela o segmento que liga as frações 1/5 e 1/3 foi dividido em 16 partes iguais. Indicando por x o número de segmentos que precisamos pular para ir de 1/5 até 1/4, escreva equação permitindo calcular x. Resolvendo essa equação, indique a letra do ponto onde está a fração 1/4.



Resp.

Indiquemos por x a quantidade de segmentos (partes) que devemos pular para ir de $1/5$ até $1/4$.
Temos:

$$\frac{1}{5}+\frac{x}{16}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{4}\quad\therefore\quad\frac{1}{5}+\frac{x}{120}=\frac{1}{4}\quad\therefore\quad\frac{x}{120}=\frac{1}{20}\quad\therefore\quad x=6.$$

Logo, como iremos pular seis segmentos, a letra pedida é A.

Problema 4 -

Determine todos os números inteiros positivos a,b,c verificando a igualdade:

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b+c-2}=1.$$

Resp.

a). Quando $x,y,z\geqslant 2$ é imediato vermos que $x=y=z=2$ é uma solução. A dificuldade do problema está em mostrar que não existe outra solução com $x,y,z\geqslant 2$. Para isso é suficiente observar que se ao menos uma dentre essas variáveis for maior do que 2, então a soma fica menor do que um. Com efeito, por exemplo, se $x>2$ e $y,z\geqslant 2$, então $x+y>4$, logo $\frac{1}{x+y}<1/4$ e semelhantemente $\frac{1}{x+z}<1/4$, logo $\frac{1}{x+y}+\frac{1}{z+x}<1/2$, e vemos que para que a soma das quatro frações valha um é preciso que a soma das duas últimas seja maior do que $1/2$. Contudo, o maior valor que $\frac{1}{y+z}$ pode ter é $1/4$ (quando $y=z=2$) e, neste caso, teríamos $x+y+z-2=x+y>4$, de modo que a última fração fica menor do que $1/4$, logo a maior soma das duas últimas é menor do que $1/4+1/4=1/2$, e não maior do que $1/2$.
(Verifique um exemplo: $x=3, y=z=2$, o que dá $\frac{1}{5}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=0,2+0,25+0,2+0,2<1$.)

b). Afirmação: quando $x, y, z \geqslant 1$ não existem outras soluções além das determinadas acima. Observe que a simetria do problema nos permite supor que $x \leqslant y \leqslant z$. Daí, para provar a *inexistência* de novas soluções, basta mostrar que se $1 = x \leqslant y \leqslant z$, então a soma das quatro frações será diferente de um, ou seja que:
$$\frac{1}{1+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{1+z}+\frac{1}{y+z-1} \neq 1.$$
Por outro lado, para provar isso, observe que basta estudarmos apenas três possibilidades: $(x=1, y=1, z \geqslant 1)$, $(x=1, y=2, z \geqslant 2)$, e $(x=1, y, z \geqslant 3)$.

– *Possibilidade* $(x=1, y, z \geqslant 3)$.

Temos $1+y \geqslant 4, 1+z \geqslant 4, y+z \geqslant 6, y+z-1 \geqslant 5$, de modo que:
$$\frac{1}{1+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{1+z}+\frac{1}{y+z-1} \leqslant \frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{26}{30}<1.$$
– *Possibilidade* $(x=1, y=2, z \geqslant 3)$.
$$\frac{1}{3}+\frac{1}{2+z}+\frac{1}{1+z}+\frac{1}{z+1}=1\,? \text{ ou } \frac{1}{2+z}+\frac{2}{1+z}=\frac{2}{3}\,? \text{ ou } \frac{5+3z}{(1+z)(2+z)}=\frac{2}{3}\,?$$
Isso é o mesmo que perguntar se $15+9z=2(2+z+2z+z^2)$, ou se existe algum inteiro $z \geqslant 3$ tal que $11+3z=2z^2$. Ora, a aplicação da fórmula de Bhaskara mostra imediatamente que isso não é o caso. Resumindo: não temos soluções neste caso.

– *Possibilidade* $(x=1, y=1, z \geqslant 1)$.
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{1+z}+\frac{1}{z+1}+\frac{1}{z}=1\,? \text{ ou } \frac{2}{1+z}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}\,? \text{ ou } \frac{1+3z}{z(1+z)}=\frac{1}{2}\,?$$
Isso é o mesmo que perguntar se $2+6z=z+z^2$, ou se existe algum inteiro $z \geqslant 1$ tal que $2+5z=z^2$. Novamente Bhaskara mostra que isso não ocorre, logo, também neste caso, não temos soluções.

Problema 5 -

Dados dois números irracionais, x e y, formemos as somas $x+y$ e $x-y$. Pede-se:
a). provar que é possível que qualquer uma dessas somas seja um número racional;
b). provar que é impossível que ambas essas somas sejam, simultâneamente, números racionais.

Resp.

a). Tomemos $x=1+\sqrt{2}$ e $y=1-\sqrt{2}$, então $x+y=2$ é racional (e $x-y$ irracional). E se tomarmos $x=1+\sqrt{2}$ e $y=\sqrt{2}$ temos $x-y=1$ racional (e $x+y$ irracional).

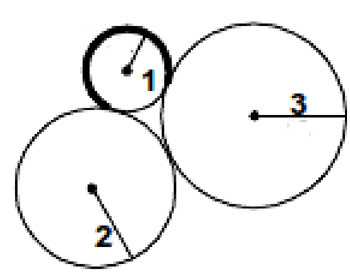
b). Se ambos $x+y$ e $x-y$ fossem racionais teríamos um absurdo. Com efeito, sua soma seria racional, ora essa soma é $2x$ que é irracional, pois o enunciado do problema diz que x é irracional.

Problema 6 -

A linha grossa na figura ao lado inicia e termina em pontos de tangência. Pede-se determinar seu comprimento.

Resp.

Unindo os centros desses círculos, obtemos um triângulo de lados 3, 4 e 5, logo é um triângulo retângulo cujo ângulo reto tem como vértice o centro do círculo menor. A partir disso é fácil vermos que a linha grossa é 3/4 da circunferência do círculo menor, ou seja: seu comprimento é $\frac{3}{4}(2\pi \times 1) = \frac{3\pi}{2}$.



Observação.

Respostas aproximadas, baseadas em medida por régua e sem maiores justificativas, tiveram pontuação mínima.

Problema 7 -

Considere o número de 8080 dígitos que se forma justapondo o bloco de dígitos 2025 um total de 2020 vezes: 202520252025…2025. *Qual o menor divisor (maior do que um) deste número? Justifique sua resposta.*
Resp.
Indiquemos por N o número que foi construído. Como 2025 divide N, e 3 divide 2025 (pois $2025/3 = 675$), segue que 3 é divisor de N. Ora, como N é ímpar, 2 não é seu divisor, logo o menor divisor é 3.
Observação.
A grande maioria dos alunos resolveu este problema usando o conhecido critério da divisibilidade por 3 que se aprende na Escola. Como a soma dos dígitos de 2025 vale 9, a soma dos dígitos de N vale 2020×9, um resultado que é divisível por 3, logo, por tal critério, N também é divisível por 3.

Problema 8 -

Na equação $(x-a)^2+(x-b)^2 = 2ab-1$*, os números* a, b *são inteiros positivos. A partir do exame das possibilidades de paridade de* $a-b$ *e* $a+b$*, demonstre que essa equação nunca tem raízes racionais.*
Resp.
A equação fica: $2x^2-2(a+b)x+(a-b)^2+1 = 0$, cujo discriminante é $\Delta = 4\big((a+b)^2-2(a-b)^2-2\big)$. Logo, teremos raízes racionais se, e somente se, $\big((a+b)^2-2(a-b)^2-2\big) = k^2$, para algum número inteiro k. Mostraremos que isso é impossível, analisando paridade.

Iniciamos observando que $p = a+b$ e $q = a-b$ sempre tem paridade igual. Disso sai que temos dois casos a analisar: ambos pares ou ambos ímpares.
– caso ambos pares
temos $a+b = 2m, a-b = 2n$, para m, n inteiros. Então $\big((a+b)^2-2(a-b)^2-2\big) = 4m^2-8n^2-2$ e basta observar que o membro da direta é divisível por 2, mas não por 4, logo não é quadrado, ou seja: é impossível existir o tal k.
– caso ambos ímpares
temos $a+b = 2m+1, a-b = 2n+1$, para m, n inteiros.
Então $\big((a+b)^2-2(a-b)^2-2\big) = 4m(m+1)-8n(n+1)-3 = 8h+5$ (com h inteiro), o que mostra que o resto da divisão do membro da esquerda por 8 é 5. Ora, o resto da divisão por 8 de um quadrado só pode ser 0, 1 ou 4, de modo que o membro da esquerda não é um quadrado, ou seja: também neste caso é impossível existir o tal k.