Nível 3

Problema 1 -

No mês de agosto, na fatura do consumo mensal de água da loja de José estava escrito:

Valor do consumo = R\$ 4860, imposto = R\$ 729, total a pagar = R\$ 5589.

Como a loja nunca gastou mais de R\$ 4000, José foi reclamar na prefeitura. Lá lhe reajustaram o total a pagar para R\$ 3979. Sabendo que o imposto é um percentual do consumo e fixo por lei, pede-se calcular na nova fatura o valor em reais do consumo e do imposto.

Resp.

Temos: $c = 4860, i = 729, T = 5589$, de modo que o percentual de imposto é $729/4860 = 0,15 = 15\%$.
Então: $T' = 3979 = c' + i' = c' + 0,15c' = 1,15c'$, e assim: $c' = 3979/1,15 = 3460$, e $i' = 0,15c' = 579$.

Problema 2 -

Tomemos uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que verifica $f(x^2 + 1) = x^4 + 4x^2$, para todos os $x \in \mathbb{R}$.
Pede-se determinar o valor de $f(x^2 - 1)$.

Resp.

Temos $x^4 + 4x^2 = x^4 + 4x^2 + 4 - 4 = (x^2 + 2)^2 - 4$, ou seja $f(x^2 + 1) = (x^2 + 2)^2 - 4 = (x^2 + 1 + 1)^2 - 4$, de modo que $f(y) = (y + 1)^2 - 4$, e então: $f(x^2 - 1) = (x^2 - 1 + 1)^2 - 4 = x^4 - 4$.

Problema 3 -

Dados dois números irracionais, x e y, tais que seu produto xy também é irracional, formemos as somas $x + y$ e $x^2 + y^2$. Pede-se demonstrar que

a). pode *ocorrer que* ambas *essas somas sejam números irracionais;*

b). sempre *ao menos uma dessas somas é um número irracional.*

Resp.

a). Tomemos $x = 1 + \sqrt{2}, y = \sqrt{2}$. Então $xy = 2 + \sqrt{2}$ é irracional, e ambos $x + y = 1 + 2\sqrt{2}$, $x^2 + y^2 = (3 + 2\sqrt{2}) + 2$ são irracionais.

b). se as duas somas fossem racionais, teríamos um absurdo. Com efeito, a igualdade: $(x + y)^2 = (x^2 + y^2) + 2xy$ seria uma igualdade entre um racional e um irracional (a soma de um racional com um irracional).

Problema 4 -

Considere as funções $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ que verificam a condição:

$$f(n) + f(n+1) = 2n + 1, \text{ para todos os números inteiros } n.$$

a). Mostre que elas têm como fórmula uma expressão do tipo $f(n) = (-1)^n \cdot A + B \cdot n$, válida tanto para todos os $n > 0$ como para todos os $n < 0$.

b). Determine o valor numérico de A, B nos casos em que vale $f(1) + f(2) + f(3) + \ldots + f(63) = 2017$.

Resp.

a). De $f(n+1) = 2n + 1 - f(n)$, obtemos sucessivamente:
$f(1) = 1 - f(0)$, $f(2) = 3 - f(1) = 2 + f(0)$, $f(3) = 5 - f(2) = 3 - f(0)$, etc., e então uma indução imediata nos permite concluir que $f(n) = n + (-1)^n f(0)$, para todos os $n \geqslant 1$. Por outro lado, a partir de $f(n) = 2n + 1 - f(n+1)$, de modo análogo se conclui que $f(n) = n + (-1)^n f(0)$ também vale para todos os n inteiros negativos. Resumindo: $A = f(0)$, $B = 1$.

b). Da fórmula obtida em a), temos:

$$f(1) = 1 - f(0), f(2) = 2 + f(0), f(3) = 3 - f(0), \ldots, f(63) = 63 - f(0),$$

de modo que:

$$2017 = (1 + 2 + 3 + \ldots + 63) - f(0) = \tfrac{63 \times 64}{2} - f(0) = 2016 - f(0) \quad \therefore \quad f(0) = 2016 - 2017 = -1.$$

Resumindo: neste caso, $A = -1$, e em todos os casos $B = 1$.

Problema 5 -

Sendo $n \geqslant 2$ número inteiro, escreva a diferença $n^3 - n$ como o produto de três inteiros distintos e a partir disso mostre que ela é divisível por ambos 2 e 3, para todos os infinitos *valores de n.*

Resp.

Temos $n^3 - n = n(n^2 - n) = n(n-1)(n+1)$. Aí, os dois primeiros fatores constituem o produto de um par e um ímpar, logo é um número par, então $n^3 - n$ sempre é divisível por 2.

Resta provar a divisibilidade por 3. Isso é consequência de termos escrito $n^3 - n$ como o produto de três inteiros consecutivos. Vejamos, examinando todas as possibilidades de n.

Se $n = 3k$, então $n(n-1)(n+1) = 3 \times k(3k-1)(3k+1)$.

Se $n = 3k+1$, então $n(n-1)(n+1) = (3k+1)(3k)(3k+2) = 3 \times (3k+1)k(3k+2)$.

Se $n = 3k+2$, então $n(n-1)(n+1) = (3k+2)(3k+1)(3k+3) = 3 \times (3k+2)(3k+1)(k+1)$.

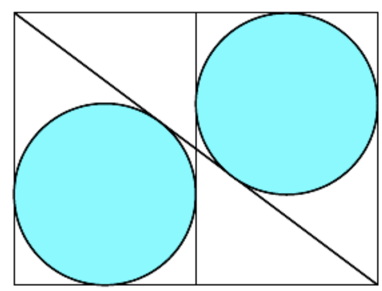
Problema 6 -

A figura ao lado é o mapa de um jardim retangular onde existem duas piscinas circulares. Cada uma das piscinas é tangente a dois lados do jardim e a uma das suas diagonais, bem como ao segmento unindo os pontos médios dos lados maiores do jardim.

Sabendo que o raio de cada piscina é 2 metros, desejamos calcular os comprimentos dos lados do jardim. Para isso, pede-se:

a). deduzir fórmula dando a área de um triângulo em termos do comprimento de seus lados, se o triângulo circunscrever um círculo de raio r,

b). concluir determinando o comprimento dos lados do jardim.



Resp.

a). Seja um triângulo de vértices A, B, C e circunscrevendo um círculo de centro O e de raio r. Esse centro O determina três triângulos: AOB, COB, BOC, os quais tem altura r relativamente ao lado que é lado do triângulo original. Temos, então:

$$a(AOB) = AB \cdot r/2, \quad a(COB) = AC \cdot r/2, \quad a(BOC) = BC \cdot r/2,$$

de modo que a fórmula pedida é: $\quad a(ABC) = (AB + AC + BC) \cdot r/2$.

b). Obviamente, o lado maior do jardim é 8 metros. Resta calcular o comprimento h do lado menor. Tomemos qualquer um dos dois triângulos que tangenciam piscina, ele tem área $8h/2 = 4h$, e seus lados valem $8, h, \sqrt{64+h^2}$, de modo que a fórmula de a) nos dá

$4h = (8+h+\sqrt{64+h^2}) \times 2/2 \quad \therefore \quad 3h-8 = \sqrt{64+h^2} \quad \therefore \quad 9h^2-48h+64 = 64+h^2 \quad \therefore \quad 8h^2-48h = 0.$

Disso tiramos que $h = 6$.

Problema 7 -

Na equação $(x-a)^2 + (x-b)^2 = 2ab - 1$, os números a, b são inteiros positivos. A partir do exame das possibilidades de paridade de $a-b$ e $a+b$, demonstre que essa equação nunca tem raízes racionais.

Resp.

A equação fica: $2x^2 - 2(a+b)x + (a-b)^2 + 1 = 0$, cujo discriminante é $\Delta = 4\big((a+b)^2 - 2(a-b)^2 - 2\big)$. Logo, teremos raízes racionais se, e somente se, $\big((a+b)^2 - 2(a-b)^2 - 2\big) = k^2$, para algum número inteiro k. Mostraremos que isso é impossível, analisando paridade. Iniciamos observando que $p = a+b$ e $q = a-b$ sempre tem paridade igual. Disso sai que temos dois casos a analisar: ambos pares ou ambos ímpares.

– caso ambos pares
temos $a+b=2m, a-b=2n$, para m, n inteiros. Então $\left((a+b)^2-2(a-b)^2-2\right)=4m^2-8n^2-2$ e basta observar que o membro da direta é divisível por 2, mas não por 4, logo não é quadrado, ou seja: é impossível existir o tal k.
– caso ambos ímpares
temos $a+b=2m+1, a-b=2n+1$, para m, n inteiros.
Então $\left((a+b)^2-2(a-b)^2-2\right)=4m(m+1)-8n(n+1)-3=8h+5$ (com h inteiro), o que mostra que o resto da divisão do membro da esquerda por 8 é 5. Ora, o resto da divisão por 8 de um quadrado só pode ser 0, 1 ou 4, de modo que o membro da esquerda não é um quadrado, ou seja: também neste caso é impossível existir o tal k.

Problema 8 -

Temos que $a_1, a_2, a_3, \ldots$ é uma progressão aritmética e que $g_1, g_2, g_3, \ldots$ é uma progressão geométrica não constante. É dado que elas verificam: $g_1=a_1 \neq 0$, $g_2=a_2$, $g_3=a_{10}$. Demonstrar que, também, para cada $n \geqslant 3$ pode-se achar um inteiro p tal que $g_n=a_p$.
Resp.
Sejam δ e r as razões da PA e da PG (note que $r \neq 1$). Temos:
$$a_2-a_1=a_3-a_2=a_4-a_3=\ldots=\delta, \quad g_2/g_1=g_3/g_2=g_4/g_3=\ldots=r.$$
Das hipóteses do problema:
$g_1 r=g_2=a_2=a_1+\delta=g_1+\delta$, logo $\delta=g_1(r-1)$;
$g_1 r^2=g_3=a_{10}=a_1+9\delta=g_1+9g_1(r-1)$, logo, como $a_1=g_1 \neq 0$: $r^2=1+9(r-1)$, ou $r^2-9r+8=0$.
Esta equação tem como raízes: $r=1$, que devemos descartar pois a PG não é constante, e $r=8$.
Consequentemente, $\delta=g_1(r-1)=7g_1$.
Daí, dado $n \geqslant 3$, o problema pede determinar p tal que $g_n=a_p$, ou seja:
$$g_1 \cdot 8^{n-1}=a_p=a_1+(p-1)\delta=g_1+(p-1)7g_1 \quad \therefore \quad 8^{n-1}=1+7(p-1) \text{ (pois } g_1 \neq 0).$$
Consequentemente, devemos ter:
$$p=\frac{6+8^{n-1}}{7}\cdot$$
Resta provarmos que essa fórmula sempre dá um valor inteiro positivo para p, quando $n \geqslant 3$. Ora, isso é consequência do fato que 8^k tem a forma “um mais um múltiplo de 7”, qualquer que seja o valor do inteiro $k \geqslant 1$.