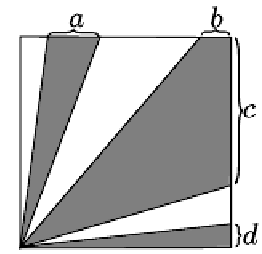
ORMGrande PoA/2018

OLIMPÍADA REGIONAL DE MATEMÁTICA DA GRANDE PORTO ALEGRE

Nível 2



Problema 1 -

A figura ao lado mostra um quadrado (talvez fora de escala) de área 36. Sabendo que a área total das regiões sombreadas vale 27, determine o valor da soma $a+b+c+d$.

Resp.:

Usemos repetidamente que a área de um triângulo pode ser expressa como a metade do produto de sua base pela correspondente altura. Assim, depois de dividirmos a figura sombreada do meio em dois triângulos cuja base é a diagonal do quadrado, ficamos com:

$$27 = \tfrac{6a}{2} + \tfrac{6b}{2} + \tfrac{6c}{2} + \tfrac{6d}{2} = 3(a+b+c+d) \quad \therefore \quad a+b+c+d = 9.$$

Problema 2 -

Uma revenda vendeu um primeiro carro por 40% *a mais do que pagou por ele, e vendeu um segundo por* 60% *a mais do que tinha pago por este. Sendo que o lucro* total *dessa venda foi* 54%, *pede-se a razão entre o preço que ela* pagou *pelo primeiro e o preço que* pagou *pelo segundo.*

Resp.:

Indiquemos por a, b os preços de compra desses carros, e por a', b' os preços de venda deles. Foi dado que $a' + b' = 1.4a + 1.6b$ e que $a' + b' = 1.54(a+b)$, de modo que $1.4a + 1.6b = 1.54a + 1.54b$. Então: $0.06b = 0.14a$, de modo que $a/b = 0.06/0.14 = 3/7$, ou aproximadament 42.86%.

Problema 3 -

Determinar todas *as maneiras de se retirar uma ou mais frações da soma seguinte de modo que as frações que ficarem tenham soma igual a um:*

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}.$$

Resp.:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12} = \frac{60+40+30+20+15+12+10}{120}.$$

Então precisamos descobrir todas as maneiras de tirarmos uma ou mais parcelas do numerador de modo que a soma resultante seja 120. Ora, é imediato que obrigatoriamente temos de tirar 15 e 12, pois qualquer uma delas impedirá soma 120. Resta descobrir que outras parcelas podemos retirar.

– Iniciamos examinando se é possível retirar apenas uma única parcela de $60+40+30+20+10$ de modo obtermos uma soma 120. Testando, vemos que é só retirando a 40 obtemos os 120.

– Examinemos agora se é possível retirar apenas mais duas parcelas, além de 15 e 12. Ou seja, examinemos se é possível retirar apenas duas parcelas de $60+40+30+20+10$ de modo obtermos uma soma 120. Tentando todas as possibilidades é imediato vermos que isso só ocorre retirando 30 e 10, o que dá $60+40+20 = 120$.

– Examinemos agora se é possível retirar apenas mais três parcelas, além de 15 e 12. Ou seja, examinemos se é possível retirar apenas três parcelas de $60+40+30+20+10$ de modo obtermos uma soma 120. Ora, ficariam apenas duas dessas parcelas, e é imediato que é impossível essas duas somarem 120.

– Mais impossível ainda é retirando 4 ou mais parcelas.

Conclusão final: as soluções desta problema são

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12} = 1, \quad \text{e} \quad \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6} = 1.$$

Problema 4 -

Determinar o número inteiro que é o resultado do cálculo de

$$\sqrt{(2018+2018)+(2018-2018)+(2018\times 2018)+(2018\div 2018)}$$

Resp.:

Usando ideia do aluno Felipe Maccari, simplifiquemos a resolução escrevendo $a=2018$. Então,

$$\sqrt{2a+0+a\times a+a\div a}=\sqrt{a^2+2a+1}=\sqrt{(a+1)^2}=\sqrt{2019^2}=2019.$$

Problema 5 -

José tinha dois fios, um com 2m de comprimento e o outro com 1m. Suponha que ele tenha cortado esses fios de modo que todos os pedaços tenham o mesmo tamanho. Pede-se provar que, sempre que José fizer essa operação,

a). o número de pedaços do fio grande *sempre* será o dobro dos pedaços do fio pequeno;

b). o total de pedaços *sempre* será um múltiplo de 3.

Resp.:

Resolução algébrica. Indiquemos por m, n, p, nesta ordem, o número de pedaços em que o fio grande foi cortado, o número de pedaços em que o fio pequeno foi cortado, e o tamanho dos pedaços. Como todos os pedaços têm mesmo tamanho: $2=mp, 1=np$, então $mp=2=2np$, de modo que $m=2n$ e que $m+n=2n+n=3n$, o múltiplo de 3.

Resolução não algébrica. Podemos visualizar o fio grande como feito de dois fios de 1m. Então podemos entender a divisão do fio grande como o trabalho de cortar dois fios pequenos, sempre usando pedaços de mesmo tamanho. Então, sempre cortaremos o fio grande no dobro de pedaços que cortarmos o fio pequeno, o que responde ao item a). Além disso, o número total de pedaços será igual aos do fio pequeno mais o dobro deles usados para dividir o fio grande, ou seja o total de pedaços é três vezes o número de pedaços em que dividimos o fio pequeno, o que responde b).

Problema 6 -

Sendo n um número inteiro positivo, s(n) indica o valor da soma de todos os quadrados de 1 até n. Por exemplo: $s(1)=1^2, s(2)=1^2+2^2, s(3)=1^2+2^2+3^2, s(4)=1^2+2^2+3^2+4^2$, *etc. Pede-se então:*

a). determinar o algarismo das unidades de cada uma das dez primeiras dessas somas, ou seja para as somas: s(1), s(2), s(3), etc., até s(10);

b). determinar o algarismo das unidades da soma s(2018).

Resp.:

a). Meramente calculamos cada uma das somas pedidas e verificamos o algarismo das unidades. O modo inteligente de fazer isso é ir aproveitando os cálculos já feitos, e destes cuidar só o algarismo das unidades. Usando uma notação rudimentar, mas fácil de entender, temos:

$s(1)=1^2\to 1, s(2)=1^2+2^2\to 5, s(3)=s(2)+3^2\to 5+9\to 4, s(4)=s(3)+4^2\to 4+6\to 0,$

$s(5)=s(4)+5^2\to 0+5\to 5, s(6)=s(5)+6^2\to 5+6\to 1, s(7)=s(6)+7^2\to 1+9\to 0,$

$s(8)=s(7)+8^2\to 0+4\to 4, s(9)=s(8)+9^2\to 4+1\to 5, s(10)=s(9)+10^2\to 5+0\to 5.$

Resumindo, os algarismos pedidos são: $1,5,4,0,5,1,0,4,5,5$.

b). Iniciamos observando que o algarismo das unidades (o qual é 5) de $1^2+2^2+3^2+\ldots+10^2=s(10)$ é o mesmo algarismo das unidades de $11^2+12^2+13^3+\ldots+20^2$, pois as parcelas de mesma posição em cada uma dessas somas têm o mesmo algarismo das unidades. Por exemplo, $1^2\to 1$ e $11^2\to 1$, $2^2\to 4$ e $12^2\to 4$, etc. A mesma conclusão vale para $21^2+22^2+23^3+\ldots+30^2$, bem como para os demais blocos de 10 parcelas sucessivas. Então, escrevendo $s(2018)$ como

$(1^2+2^2+3^3+\ldots+10^2)+(11^2+12^2+13^2+\ldots+20^2)+(21^2+\ldots+30^2)+\ldots+(91^2+92^2+\ldots+100^2)+$
$(101^2+102^2+\ldots+110^2)+\ldots+(2011^2+2012^2+\ldots+2020^2)-2020^2-2019^2,$

segue que o algarismo das unidades (ou algarismo unitário) de $s(2018)$ é o algarismo unitário de

$\Big[$ (algarismo unitário de $\frac{2020}{10}\times 5$) – (algarismo unitário de 2020^2) – (algarismo unitário de 2019^2) $\Big]$,

ou seja: o algarismo unitário de $s(2018)$ é o algarismo unitário de $202\times 5-0-1=1010-0-1=1009$, o qual é 9.

Problema 7 -

Para cada retângulo, indicaremos por A sua área em cm^2 e por P o valor de seu perímetro em cm. Então, pede-se:

I). determinar todos os retângulos de $A = 56$ e $P = 30$;

II). descobrir a relação mais geral que puder entre A e P capaz de garantir que exista um retângulo com área A e perímetro P.

Resp.:

I). Indicando por a, b os lados desses retângulos, temos: $a+b = 30/2, ab = 56$. De modo que $b = 15-a$ e então: $56 = a(15-a) = 15a-a^2$. Ora, Bhaskara mostra que as raízes da equação $a^2-15a+56 = 0$ são $a = 7$ e $a = 8$. De modo que os retângulos procurados têm $(a, b) = (7, 8)$ e $(a, b) = (8, 7)$. Ou seja, são os retângulos de lados 7 e 8.

II). O sistema de equações fica: $a + b = p/2, ab = A$. Usando que $b = p/2 - a$, obtemos a equação $a^2 - \frac{p}{2}a + A = 0$. Como queremos raízes reais positivas, Bhaskara exige que $(p/2)^2 - 4A \geqslant 0$ em

$$a = \tfrac{1}{2}(p/2 \pm \sqrt{(p/2)^2 - 4A}\,).$$

– Se $(p/2)^2 - 4A = 0$, a fórmula acima dá $a = p/4$, daí $b = p/2 - a = p/2 - p/4 = p/4$. Ou seja, a solução são os quadrados de lados $a = b = p/4$.

– Se $(p/2)^2 - 4A > 0$ Bhaskara nos dá duas possibilidades de solução.

Uma primeira possibilidade seriam os retângulos de lados

$$a = \tfrac{1}{2}\big(p/2 - \sqrt{(p/2)^2 - 4A}\,\big), \quad b = p/2 - a.$$

Existem tais retângulos? Na fórmula de Bhaskara acima: $\sqrt{(p/2)^2 - 4A} < \sqrt{(p/2)^2} = p/2$, logo $a > 0$. Então onde só falta garantirmos que também $b > 0$. Ora, isso é verdade pois Bhaskara também mostra que $a < p/4$, logo $b = p/2 - a > p/2 - p/4 > 0$.

A outra possibilidade dada por Bhaskara seriam os retângulos de lados

$$a = \tfrac{1}{2}\big(p/2 + \sqrt{(p/2)^2 - 4A}\,\big), \quad b = p/2 - a.$$

Existem tais retângulos? Neste caso, Bhaskara está expressando a como soma de parcelas positivas, logo $a > 0$. Então só falta garantirmos que o correspondente $b > 0$. Provaremos isso mostrando que é impossível (neste caso) essas fórmulas produzirem um valor nulo ou negativo para b.

Usando as fórmulas acima poderemos encontrar $b = 0$? (o que seria absurdo para retâgulos).

Ora, se a segunda fórmula der $b = 0$ teríamos $p/2 - a = 0$, ou seja $a = p/2 = 1/2(a + b) = a/2$, logo $a = a/2$, o que implicaria $a = 0$, um absurdo pois já garantimos que $a > 0$.

Usando as fórmulas acima poderemos encontrar $b < 0$? (o que também é absurdo para retâgulos).

Ora, se a segunda fórmula der $b < 0$ teríamos $p/2 < a$, o que Bhaskara permitiria escrever

$p/2 < \frac{1}{2}\big(p/2 + \sqrt{(p/2)^2 - 4A}\,\big) \therefore p < p/2 + \sqrt{(p/2)^2 - 4A} \therefore p/2 < \sqrt{(p/2)^2 - 4A} < \sqrt{(p/2)^2} = p/2$, um óbvio absurdo.

Resumamos. Nesta segunda possibilidade, é impossível acabarmos calculando um valor nulo ou negativo para b, logo, sempre calcularemos um valor $b > 0$ e assim, nesta possibilidade, sempre determinaremos um retângulo de lados a, b.

Resumo final:

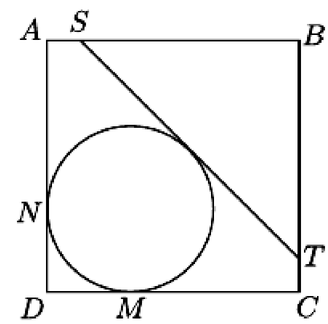
– se $p^2 = 16A$ (ou seja: $((p/2)^2 - 4A = 0)$, as únicas soluções são os quadrados de lados $a = b = p/4$;

– se $p^2 > 16A$ (ou seja: $((p/2)^2 - 4A > 0)$, as fórmulas $a = \frac{1}{2}(p/2 \pm \sqrt{(p/2)^2 - 4A}\,)$, $b = p/2 - a$ sempre determinam um retângulo de lados medindo a, b.

Obs.: penalizamos pouco os alunos que chegaram às fórmulas para a e b, mas se limitaram a afirmar que é necessário termos $(p/2^2 - 4A \geqslant 0$, sem provar que essa condição garante a existência dos retângulos.

Problema 8 -

Na figura ao lado, o círculo tangencia o quadrado ABCD nos pontos M e N. Por sua vez, os pontos S e T estão posicionados nos lados desse quadrado de modo que AS=CT e que ST seja tangente ao círculo. Se medir 2 o diâmetro do círculo e também for 2 a distância de M a C, pede-se *determinar o comprimento de ST.*



Resp.:

É imediato que nesse quadrado os lados medem 3. Então, podemos dividí-lo em nove quadradinhos de lado unitário, conforme figura abaixo. Então, OB é diagonal de um quadrado de lado 2, logo Pythagoras nos dá: $OB = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8}$, e como o raio é unitário segue que $PB = \sqrt{8}-1$.
Ora, a simetria das construções mostram que SBT é um triângulo isósceles e que PB é perpendicular a ST. Então, o ângulo PBT mede $45°$, e assim PT=PB, logo ST= 2 PT= 2 PB = $2(\sqrt{8}-1)$.