Nível 3

Problema 1 -

Uma revenda vendeu um primeiro carro por 40% a mais do que pagou por ele, e vendeu um segundo por 60% a mais do que tinha pago por este. Sendo que o lucro *total* dessa venda foi 54%, pede-se a razão entre o preço que ela *pagou* pelo primeiro e o preço que *pagou* pelo segundo.

Resp.:

Indiquemos por a, b os preços de compra desses carros, e por a', b' os preços de venda deles. Foi dado que $a' + b' = 1.4a + 1.6b$ e que $a' + b' = 1.54(a + b)$, de modo que $1.4a + 1.6b = 1.54a + 1.54b$. Então: $0.06b = 0.14a$, de modo que $a/b = 0.06/0.14 = 3/7$, ou aproximadament 42.86%.

Problema 2 -

Numa maratona disputada por homens e mulheres, estas eram 35% dos competidores, e sabe-se que havia 252 homens a mais do que mulheres. Determinar o número total de competidores.

Resp.:

Indicando por m, h, c o número de mulheres, homens e competidores desta maratona, temos: $m = 0.35c$, logo $h = 0.65c$ e daí $h - m = 0.30c$. Ora é dado que $h - m = 252$, então $0.30c = 252$, de modo que $c = 252/0.30 = 840$.

Problema 3 -

José tinha dois fios, um com 2m de comprimento e o outro com 1m. Suponha que ele tenha cortado esses fios de modo que todos os pedaços tenham o mesmo tamanho. Pede-se provar que, sempre que José fizer essa operação,

a). o número de pedaços do fio grande sempre *será o dobro dos pedaços do fio pequeno;*

b). o total de pedaços sempre será um múltiplo de 3.

Resp.:

Resolução algébrica. Indiquemos por m, n, p, nesta ordem, o número de pedaços em que o fio grande foi cortado, o número de pedaços em que o fio pequeno foi cortado, e o tamanho dos pedaços. Como todos os pedaços têm mesmo tamanho: $2 = mp, 1 = np$, então $mp = 2 = 2np$, de modo que $m = 2n$ e que $m + n = 2n + n = 3n$, o múltiplo de 3.

Resolução não algébrica. Podemos visualizar o fio grande como feito de dois fios de 1m. Então podemos entender a divisão do fio grande como o trabalho de cortar dois fios pequenos, sempre usando pedaços de mesmo tamanho. Então, sempre cortaremos o fio grande no dobro de pedaços que cortarmos o fio pequeno, o que responde ao item a). Além disso, o número total de pedaços será igual aos do fio pequeno mais o dobro deles usados para dividir o fio grande, ou seja o total de pedaços é três vezes o número de pedaços em que dividimos o fio pequeno, o que responde b).

Problema 4 -

Os números reais a, b, c verificam $\dfrac{a}{b+c} = \dfrac{1}{3}$ e $\dfrac{b}{c+a} = 2$. Pede-se calcular o valor de $\dfrac{c}{a+b}$.

Resp.:

Temos $3a = b + c$, $b = 2c + 2a$, logo $9a = 3b + 3c$, $4b = 8c + 8a$, e então $9a + 4b = 8a + 3b + 11c$. Disso, segue que $a + b = 11c$. Conclusão: $\frac{c}{a+b} = \frac{1}{11}$.

Problema 5 -

Indiquemos por $a, b, c, d, e, A, B, C, D, E$ *os primeiros dez números primos. Pede-se decidir se a* raiz quadrada *do produto deles todos é um número racional ou irracional. Justifique.*

Resp.:

Se essa raiz fosse um número racional, escrevendo-o em forma irredutível como m/n, o produto de tais primos seria m^2/n^2, de modo que teríamos a igualdade: $n^2 \times abcbdeABCDE = m^2$. Ora, pelo Teorema Fundamental da Aritmética, da fatoração de qualquer número inteiro segue que a fatoração de seu quadrado só pode ter potências pares de números primos; então a mesma afirmação é válida tanto para m^2 como para n^2.

Como $a, b, c, \ldots, E$ são os primeiros números primos, eles não podem ser potências de outros primos; então no membro da esquerda de $n^2 \times abcbdeABCDE = m^2$ obrigatoriamente existe ao menos uma potência ímpar de primo.

(Exemplificando o raciocínio: se n admitir $2 = a$ entre seus fatores primos, o membro da esquerda da igualdade acima teria uma única potência de 2 e ela seria $2^2 \times 2$, ou $2^4 \times 2$, ou $2^6 \times 2$, etc., ou seja sempre uma potência ímpar (3,5,7, etc.) de 2; por outro lado, se n não admitir 2 como fator primo, o membro da esquerda de tal igualdade teria uma única potência de 2 e ela novamente seria ímpar: 2^1.)

Feitas essas observações, podemos provar que a raiz quadrada deste problema nunca pode dar um número racional. Com efeito, se essa raiz fosse racional, na igualdade $n^2 \times abcbdeABCDE = m^2$ o membro da esquerda teria ao menos a potência ímpar de algum primo e o membro da direita somente potências pares de primos. Uma impossibilidade, pois o Teorema Fundamental da Arimética diz que, a menos da ordem de fatores, todo número inteiro tem uma e somente uma fatoração em primos.

Obsrv:

– a maioria dos alunos fez o erro grave de afirmar que o produto de irracionais é irracional. O produto de dois irracionais pode ser irracional, ou não ser, dependendo de quem são esses irracionais. Por exemplo: $\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 4$ é racional, enquanto que $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$ é irracional;

– a unicidade de fatoração em primos no Teorema Fundamental da Aritmética não tem sido enfatizada nas escolas, o que é muito lamentável.

Problema 6 -

Seja a função f *que é definida como* $f(x) = 1 - \frac{x}{2}$*, para cada número real* $x \geqslant 0$*. Com ela, foi construída a sequência dos números* $a(n)$ *definidos por* $a(1) = f(2)$ *e* $a(n) = f\big(a(n-1)\big)$*, para cada* $n \geqslant 2$ *inteiro. Então, escrevendo* $a(1), a(2), a(3), \ldots$ *como somas de frações, expresse o valor de* $a(2018)$ *como uma* única *fração ordinária.*

Resp.:

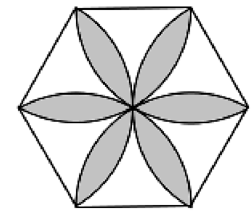
Temos: $a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 1 - 1/2, a_4 = 1 - 1/2 + 1/4, a_5 = 1 - 1/2 + 1/4 - 1/8$, sendo já imediato constatarmos um padrão que nos permite escrever:

$$a_{2018} = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2^2} - \tfrac{1}{2^3} + \cdots + + \tfrac{1}{2^{2016}}.$$

Então, usando a fórmula para soma de PG, obtemos:

$$a_{2018} = \frac{1 - \left((-\frac{1}{2})^{2017}\right)}{1 - (-1/2)} = \frac{1 + 2^{2017}}{3 \cdot 2^{2016}}.$$

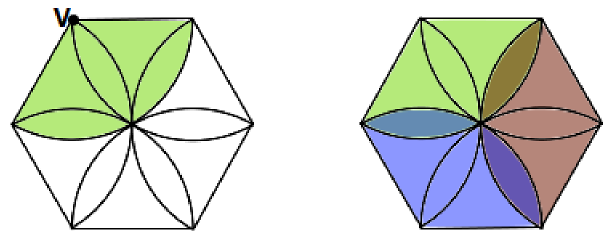
Problema 7 -



Calcule a área da flor desenhada no hexágono regular ao lado, sabendo que os lados do hexágono medem um, que a flor foi construída a partir de círculos de raio um e cujos centros estavam nos vértices do hexágono.

Resp.:

Indiquemos por H a área desse hexágono, P a área de uma pétala dessa flor e S a área do setor sombreado na primeira figura abaixo.



Como o ângulo no vértice V é $120°$, é fácil ver que S é um terço da área de um círculo de raio um, de modo que $S = \pi/3$. Ora, como três setores iguais ao sombreado cobrem todo o hexágono, mas com a repetição de três pétalas (confira na segunda figura acima), segue que $H = 3S - 3P$, logo $3P = 3S - H$. Por outro lado, vendo esse hexágono como composto de seis triângulos equiláteros de lado unitário, segue que $H = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Conclusão, a área da flor vale: $6P = 6S - 2H = 2\pi - 3\sqrt{3}$.

Problema 8 -

Seja T um triângulo cujos lados medem 14, 10 e 10. Pede-se determinar o comprimento dos lados de todos *os triângulos isósceles que têm a mesma área e o mesmo perímetro que T.*

Resp.:

É imediato que triângulo dado tem perímetro 34. Para calcular sua área, Pythagoras dá que $7^2 + h^2 = 10^2$, onde h é sua altura, de modo que $h = \sqrt{51}$, e então sua área vale $14h/2 = 7\sqrt{51}$.

Para cada triângulo isósceles que precisamos determinar, indiquemos por x o comprimento de seus lados iguais e por $2y$ o comprimento de sua base (o fator 2 foi tomado para simplificar os cálculos a seguir). Então, seus perímetros devem verificar: $2x + 2y = 34$, e como suas áreas podem ser vistas como o dobro das áreas de um triângulo retângulo de base y e altura $\sqrt{x^2 - y^2}$ (por Pythagoras), tais triângulos isósceles têm de verificar: $y\sqrt{x^2 - y^2} = 7\sqrt{51}$. Então, temos o seguinte sistema de equações a resolver:

$$x + y = 17, \quad y\sqrt{(x+y)(x-y)} = 7\sqrt{51}.$$

Usando duas vezes a primeira dessas equações, reduzimos o sistema à uma única equação, da qual precisamos determinar todas as raízes positivas: $y\sqrt{17(17-2y)} = 7\sqrt{51}$, ou seja: $2y^3 - 17y^2 + 147 = 0$.

Ora o enunciado do problema já nos diz que uma raiz é $14/2 = 7$, de modo que podemos fatorar a equação como: $(y-7)(2y^2 - 3y - 21) = 0$. Então, Bhaskara imediatamente nos dá as outras duas raízes: $y = 2$ e $y = -1/2$, a segunda das quais deve ser descartada por ser negativa.

Conclusão:

além do triângulo de lados $14, 10, 10$, só existem o que tem base $2y = 4$ e lados $x = 17 - y = 15$.