ORMGrande PoA/2019

OLIMPÍADA REGIONAL DE MATEMÁTICA DA GRANDE PORTO ALEGRE

Nível 2

Problema 1 -

Iniciando com um primeiro quadrado de lado um cm, construímos sucessivamente um segundo quadrado, um terceiro, um quarto e assim por diante, cada vez maiores e de acordo com o esquema das figuras abaixo. Pede-se calcular a área do quinto quadrado construído desse modo.

Resp.

É imediato que $\ell_1 = 1$, $A_1 = \ell_1^2 = 1$, e aplicando sucessivamente o Teorema de Pythagoras:
$\ell_2 = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$, $A_2 = \ell_2^2 = 5$; $\ell_3 = \ell_2\sqrt{5} = 5$, $A_3 = \ell_3^2 = 5^2$; $\ell_4 = \ell_3\sqrt{5} = 5\sqrt{5}$, $A_4 = \ell_4^2 = 5^2 \cdot 5$;
$\ell_5 = \ell_4\sqrt{5} = 5\sqrt{5}\cdot\sqrt{5} = 5^2$, $A_5 = \ell_5^2 = 5^4 = 625$.

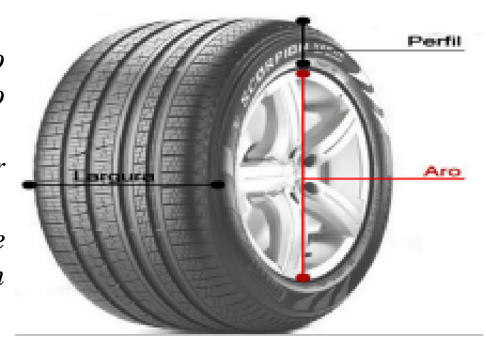
Problema 2 -

Ana fez dois copos de limonada. No primeiro, colocou 200 ml de suco de limão e 300 ml de água. No segundo copo, colocou 100 ml de suco de limão e 200 ml de água. Qual dos copos tem gosto mais forte de limão? Justifique sua resposta.

Resp.

Precisamos comparar as razões entre o volume de limão e o volume total da mistura nos dois copos, expressando-as usando uma *mesma* quantidade de mistura.
Para o primeiro copo: $200/500 = 0.40$, e no segundo copo: $100/300 = 0.33$. Logo no primeiro copo há 0.40 ml de limão para cada um ml da mistura, e no segundo 0.33 ml de limão também para um ml da mistura. Assim, o gosto mais forte é o do primeiro copo.

Problema 3 -



No sistema americano, os pneus de automóveis são especificados pelo diâmetro (a altura do pneu), a largura da banda de rodagem e pelo aro, todos medidos em polegadas.
No sistema europeu se dá a largura da banda em milímetros, o valor percentual da razão perfil/largura, e o aro em polegadas.
Tenho um pneu americano com os dados: 32 x 11,5 x 15. Determine o pneu europeu mais próximo a esse e cujos dados são expressos em números inteiros. (Se precisar, use que 1 polegada = 25,4 mm.)

Resp.

O crucial é determinar o valor do perfil do pneu. Para isso, observar que diâmetro = perfil + aro + perfil, de modo que perfil = (diâmetro - aro)/2, logo: perfil = $(32-15)/2 = 8.5$ polegadas. Com o perfil, temos para a razão perfil/largura = $8.5/11.5 = 0.739 \simeq 74\%$. A largura da banda é 11.5 x 25.4 = 292 mm. Resumindo, o pneu europeu mais próximo tem: 292 mm, 74 %, 15 polegadas.

Problema 4 -

Um cálculo direto mostra que existem números inteiros positivos n tais que n e 3^n têm o mesmo dígito na casa das unidades. Exemplos: $n = 7$ (pois $3^7 = 2187$), e $n = 13$ (pois, $3^{13} = 1594323$).
Se escrevermos ordenadamente esses inteiros ficaremos com uma sequência que inicia com:
$7, 13, 27, 33, 47, 53, 67, 73,$ *etc. Pede-se o inteiro que está na posição 2019 dessa sequência.*

Resp.
Procurando um padrão na sequência desses números, a observação cuidadosa nos mostra que, se $k = 2, 4, 6, \ldots$ for par, o número que estará na k-ésima posição da sequência vale $n = 13 + (\frac{k}{2} - 1) \times 20$. Logo, o número na milésima posição dessa sequência é $n = 13 + (500 - 1) \times 20 = 9993$.

Problema 5 -

Quantos números inteiros N, positivos e de dois dígitos, têm a propriedade de que a soma de N com o número que se obtém invertendo a ordem de seus dois dígitos dá como resultado o quadrado de algum outro número inteiro? Justifique sua resposta.

Resp.
Sendo $N = ab$, então: $ab + ba = n^2$, logo: $10(a + b) + (a + b) = n^2$, ou seja: $11(a + b) = n^2$. Ora, como 11 é um número primo, segue que: $a + b = 11$, o que nos dá as seguintes respostas:
$(a, b) = (2, 9), (3, 8), (6, 5), (7, 4)$ e seus inversos, ou seja: $N = 29, 38, 65, 74, 92, 83, 56, 47$.
(Confira: $29 + 92 = 121 = 11^2, 38 + 83 = 121 = 11^2$, etc.)

Problema 6 -

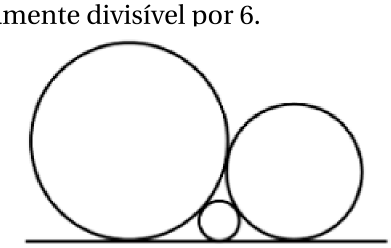
Seja o conjunto dos números inteiros positivos de cinco dígitos, $abcde$ (com $a \neq 0$). Pede-se:
6.1) calcular a quantidade de números desse conjunto;
6.2) calcular a probabilidade de sortearmos, desse conjunto, um número par que tenha 42 como soma de todos seus cinco dígitos.

Resp.
6.1) $abcde \to 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 90000$.
6.2) Determinemos a quantidade de números pares $abcde$ verificando $a + b + c + d + e = 42$.
Como temos $e = 0, 2, 4, 6, 8$, vemos que só pode ocorrer soma 42 com $e = 6, 8$. Isso significa que as únicas possibilidades podem ocorrer quando: $a + b + c + d = 36$ ou $a + b + c + d = 34$. Testando valores para a vemos que o caso 36 ocorre só uma vez: $a = 9, b + c + d = 27$, ou seja: $abcde = 99996$; enquanto que o caso 34 ocorre com $a = 7, 8, 9$, que correspondem a $b + c + d = 34 - 7 = 27, b + c + d = 34 - 8 = 26, b + c + d = 34 - 9 = 25$. Examinando as possibilidades para b, c, d, se conclui que as soluções no caso 34 são:
se $a = 7 : bcd = 999$; se $a = 8 : bcd = 998, 989, 899$; e se $a = 9 : bcd = 799, 898, 889, 988, 979, 997$.
Resumindo: caso 36: um número; caso 34: 1+3+6=10 números. Total de números pares com 5 dígitos de soma 42 é 1+10 =11. Resposta final: probabilidade = $11/90000 = 0,000122 = 0,012\%$.

Problema 7 -

Prove que, para qualquer inteiro positivo n, a soma $11n + n^3$ sempre é um inteiro divisível por 6.
Resp.
$n^3 + 11n = n^3 + 12n - n = n(n^2 - 1) + 12n = (n - 1)n(n + 1) + 12n$, onde a primeira parcela é divisível por 6 pois é produto de três inteiros sucessivos, e a parcela $12n$ é obviamente divisível por 6.

Problema 8 -



Na figura ao lado, o círculo maior tem raio 2, o médio tem raio 1 e o menor tem raio R. É dado que todos os pontos de contato na figura são pontos de tangência. Pede-se calcular o valor numérico de R.
Resp.

Imaginemos três triângulos retângulos de base horizontal e hipotenusa unindo os centros de cada par de círculos.

Para o par (círculo médio, pequeno), a hipotenusa vale $c = 1 + R$, e altura é $b = 1 - R$, de modo que sua base a verifica $c^2 = a^2 + b^2$, e então $a^2 = (1+R)^2 - (1-R)^2 = 4R$, logo $a = 2\sqrt{R}$.

Para o par (círculo grande, pequeno), a hipotenusa vale $e = 2 + R$, e altura é $f = 2 - R$, de modo que sua base d verifica $e^2 = d^2 + f^2$, e então $d^2 = e^2 - f^2 = (2+R)^2 - (2-R)^2 = 8R$, logo $d = \sqrt{8R} = 2\sqrt{2R}$.

Para o par (círculo grande, médio), a hipotenusa vale 3, sua altura vale $g = 2 - 1$, e a base vale $d + a$, de modo que $3^2 = 1^2 + (d+a)^2$, logo $(d+a)^2 = 9 - 1 = 8$, ou seja $d + a = \sqrt{8}$.

Juntando os valores determinados acima:

$\sqrt{8} = d + a = 2\sqrt{2R} + 2\sqrt{R} = 2(1+\sqrt{2})\sqrt{R}$, de modo que $(1+\sqrt{2})\sqrt{R} = \sqrt{8}/2 = \sqrt{2}$, logo

$$\sqrt{R} = \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} \quad \therefore \quad R = \frac{2}{3+2\sqrt{2}}$$