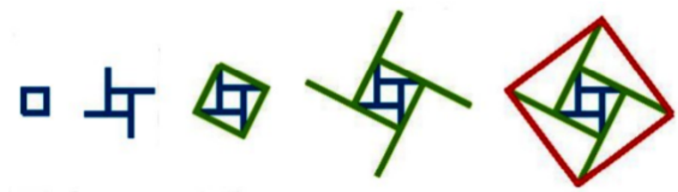
ORM Grande PoA/2019

Olimpíada Regional de Matemática da Grande Porto Alegre

Nível 3

Problema 1 -

Iniciando com um primeiro quadrado de lado um cm, construímos sucessivamente um segundo quadrado, um terceiro, um quarto e assim por diante, cada vez maiores e de acordo com o esquema das figuras abaixo. Pede-se achar o primeiro desses quadrados que tem lado maior que 2020 cm.



Resp.
É imediato que $\ell_1 = 1$, e aplicando sucessivamente o Teorema de Pythagoras: $\ell_2 = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$;
$\ell_3 = \ell_2\sqrt{5} = \left(\sqrt{5}\right)^2 = 5$; $\ell_4 = \ell_3\sqrt{5} = 5\sqrt{5}$; $\ell_5 = \ell_4\sqrt{5} = 5\sqrt{5}\cdot\sqrt{5} = 25$; $\ell_6 = \ell_4\sqrt{5} = 25\sqrt{5}$;
$\ell_7 = \ell_6\sqrt{5} = 25\sqrt{5}\cdot\sqrt{5} = 125$; $\ell_8 = \ell_7\sqrt{5} = 125\sqrt{5}$; $\ell_9 = \ell_8\sqrt{5} = 625$; $\ell_{10} = \ell_9\sqrt{5} = 625\sqrt{5} \simeq 1397$; de modo que a resposta é $\ell_{11} = \ell_{10}\sqrt{5} = 625\cdot 5 = 3125 > 2020$.

Problema 2 -

Ana fez dois copos de limonada. No primeiro, colocou 200 ml de suco de limão e 300 ml de água. No segundo copo, colocou 100 ml de suco de limão e 200 ml de água. Qual dos copos tem gosto mais forte de limão? Justifique sua resposta.
Resp.
Precisamos comparar as razões entre o volume de limão e o volume total da mistura nos dois copos, expressando-as usando uma *mesma* quantidade de mistura.
Para o primeiro copo: $200/500 = 0.40$, e no segundo copo: $100/300 = 0.33$. Logo no primeiro copo há 0.40 ml de limão para cada um ml da mistura, e no segundo 0.33 ml de limão também para um ml da mistura. Assim, o gosto mais forte é o do primeiro copo.

Problema 3 -

Determine o valor de x na igualdade: $2+5+8+\cdots+x = 155$.
Resp.
Temos $155 = 2+5+8+\cdots+x = 2+(2+3)+(2+2\cdot 3)+(2+3\cdot 3)+\ldots+(2+n\cdot 3)$, onde $x = 2+n\cdot 3$.
De modo que $155 = (n+1)2+(1+2+3+\ldots+n)3 = 2(n+1)+\frac{n(n+1)}{2}\cdot 3 = 2n+2+\frac{3}{2}\cdot n^2+\frac{3}{2}\cdot n$, e então $310 = 4n+4+3n^2+3n$, ou $3n^2+7n-306 = 0$. A única raiz positiva dessa equação é $n = 9$, de modo que $x = 2+3n = 2+27 = 29$.

Problema 4 -

Um cálculo direto mostra que existem números inteiros positivos n tais que n e 3^n têm o mesmo dígito na casa das unidades. Exemplos: $n = 7$ (pois $3^7 = 2187$), e $n = 13$ (pois, $3^{13} = 1594323$).
Se escrevermos ordenadamente esses inteiros ficaremos com uma sequência que inicia com:
$7, 13, 27, 33, 47, 53, 67, 73,$ *etc. Pede-se o inteiro que está na posição 2019 dessa sequência.*
Resp.
Procurando um padrão na sequência desses números, a observação cuidadosa nos mostra que, se $k = 2,4,6,\ldots$ for par, o número que estará na k-ésima posição da sequência vale $n = 13+(\frac{k}{2}-1)\times 20$.
Logo, o número na milésima posição dessa sequência é $n = 13+(500-1)\times 20 = 9993$.

Problema 5 -

Seja o conjunto dos números inteiros positivos de cinco dígitos, $abcde$ (com $a \neq 0$). Pede-se:
6.1) calcular a quantidade de números desse conjunto;
6.2) calcular a probabilidade de sortearmos, desse conjunto, um número par que tenha 42 como soma de todos seus cinco dígitos.

Resp.

6.1)

$abcde \to 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 90000$.

6.2)

Determinemos a quantidade de números pares $abcde$ verificando $a+b+c+d+e = 42$.
Como temos $e = 0,2,4,6,8$, vemos que só pode ocorrer soma 42 com $e = 6,8$. Isso significa que as únicas possibilidades podem ocorrer quando: $a+b+c+d = 36$ ou $a+b+c+d = 34$. Testando valores para a vemos que o caso 36 ocorre só uma vez: $a = 9, b+c+d = 27$, ou seja: $abcde = 99996$; enquanto que o caso 34 ocorre com $a = 7,8,9$, que correspondem a $b+c+d = 34-7 = 27, b+c+d = 34-8 = 26, b+c+d = 34-9 = 25$. Examinando as possibilidades para b,c,d, se conclui que as soluções no caso 34 são:
se $a = 7 : bcd = 999$; se $a = 8 : bcd = 998, 989, 899$; e se $a = 9 : bcd = 799, 898, 889, 988, 979, 997$.
Resumindo: caso 36: um número; caso 34: 1+3+6=10 números. Total de números pares com 5 dígitos de soma 42 é 1+10 =11. Resposta final: probabilidade = $11/90000 = 0,000122 = 0,012\%$.

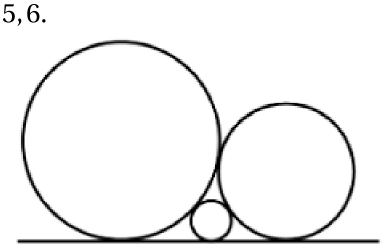
Problema 6 -

Calcular todos os números reais x verificando a equação exponencial: $(x^2-7x+11)^{(x^2-11x+30)} = 1$.

Resp.

Antes de mais nada, quando estamos lidando apenas com números reais a, b, as possibilidades de termos $a^b = 1$ são três:
$a = 1$, b qualquer; $b = 0$, a qualquer (incluindo aí o caso polêmico $a = 0$); $a = -1$, b inteiro par.
Neste problema $a = x^2-7x+11$ e $b = x^2-11x+30$, e passaremos a examinar cada uma dessas três possibilidades.
Caso $a = 1$, b qualquer: $x^2-7x+11 = 1 \therefore 0 = x^2-7x+10 = (x-5)(x-2)$, e vemos que $x = 5$ e $x = 2$.
Caso $b = 0$, a qualquer: de $x^2-11x+30 = (x-5)(x-6)$ segue que $b = 0$ ocorre para $x = 5$ e $x = 6$, as quais são a solução neste caso (incidentalmente, nenhuma delas produz $a = x^2-7x+11 = 0$, o que daria o caso polêmico $a^b = 0^0$).
Caso $a = -1$, b inteiro par: $x^2-7x+11 = -1 \therefore 0 = x^2-7x+12 = (x-3)(x-4)$, e vemos que só $x = 3$ e $x = 4$ tornam $a = -1$. Alguma dessas raízes torna $b = x^2-11x+30 = (x-5)(x-6)$ um inteiro par? É imediato verificar que ambas.
Resumindo, as soluções, no conjunto dos números reais, são $x = 2,3,4,5,6$.

Problema 7 -



Na figura ao lado, o círculo maior tem raio 2, o médio tem raio 1 e o menor tem raio R. É dado que todos os pontos de contato na figura são pontos de tangência. Pede-se calcular o valor numérico de R, e escrevê-lo na forma $a+b\sqrt{2}$ com a, b inteiros.

Resp.

Imaginemos três triângulos retângulos de base horizontal e hipotenusa unindo os centros de cada par de círculos.
Para o par (círculo médio, pequeno), a hipotenusa vale $c = 1+R$, e altura é $b = 1-R$, de modo que sua base a verifica $c^2 = a^2+b^2$, e então $a^2 = (1+R)^2-(1-R)^2 = 4R$, logo $a = 2\sqrt{R}$.
Para o par (círculo grande, pequeno), a hipotenusa vale $e = 2+R$, e altura é $f = 2-R$, de modo que

sua base d verifica $e^2 = d^2 + f^2$, e então $d^2 = e^2 - f^2 = (2+R)^2 - (2-R)^2 = 8R$, logo $d = \sqrt{8R} = 2\sqrt{2R}$.
Para o par (círculo grande, médio), a hipotenusa vale 3, sua altura vale $g = 2-1$, e a base vale $d+a$, de modo que $3^2 = 1^2 + (d+a)^2$, logo $(d+a)^2 = 9-1 = 8$, ou seja $d+a = \sqrt{8}$.
Juntando os valores determinados acima:
$\sqrt{8} = d + a = 2\sqrt{2R} + 2\sqrt{R} = 2(1+\sqrt{2})\sqrt{R}$, de modo que $(1+\sqrt{2})\sqrt{R} = \sqrt{8}/2 = \sqrt{2}$, logo

$$\sqrt{R} = \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} \quad \therefore \quad R = \frac{2}{3+2\sqrt{2}} = \frac{2(3-2\sqrt{2})}{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})} = \frac{6-4\sqrt{2}}{9-8} = 6-4\sqrt{2}.$$

Problema 8 -

Consideremos uma sequência de funções $f1, f2, f3, \ldots$, definidas do seguinte modo. A partir da função linear dada por $F(x) = ax + b$ (onde a, b são números reais), sucessivamente definimos: $f1(x) = F(x)$, $f2(x) = F(f1(x))$, $f3(x) = F(f2(x))$, $f4(x) = F(f3(x))$, etc. Pede-se
8.1). Mostrar que $f100(x) = a^k \cdot x + c$, para números k, c para escrever em termos de a, b.
8.2). Determinar os valores de a, b fazendo que $f100(x) = x$.
Resp.
8.1)
$f1(x) = F(x) = ax + b$
$f2(x) = F(f1(x)) = F(ax+b) = a(ax+b) + b = a^2x + ab + b$
$f3(x) = F(f2(x)) = F(a^2x + ab + b) = a(a^2x + ab + b) + b = a^3x + a^2b + ab + b$
sendo fácil ver que
$f100(x) = a^{100}x + b(1 + a + a^2 + \ldots + a^{99})$, de modo que $k = 100$ e $c = b(1 + a + a^2 + \ldots + a^{99})$.
8.2)
A exigência $f100(x) = x$ equivale a: $a^{100} = 1$, $b(1 + a + a^2 + \ldots + a^{99}) = 0$. Temos dois casos.
Primeiro caso: $a = 1$, o qual dá $b(1 + 1 + 1^2 + \ldots + 1^{99}) = 0$, ou seja: $b = 0$.
Segundo caso; $a = -1$, o qual dá $b[(1-1) + (1-1) + (1-1) + \ldots + (1-1)] = 0$, ou seja: $b \cdot 0 = 0$, de modo que qualquer valor de b serve, neste caso.
Concluindo, temos duas respostas: se $a = 1$ então $b = 0$; se $a = -1$ qualquer valor de b serve.