1.b

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS

3).– Atitudes positivas, suas estratégias

Existem duas estratégias (maneiras) para demonstrarmos que uma afirmação é verdadeira:

- **demonstração construtiva**: consiste em calcular os números com a propriedade afirmada, ou fazer a fatoração afirmada, ou contruir a figura que tem as propriedades afirmadas, etc.;
- **demonstração por dedução**: consiste em deduzir logicamente que tem de existir um objeto afirmado, ou que tem de valer uma propriedade afirmada, etc.

O inexperiente tende a resolver os problemas construtivamente. Contudo, pode ocorrer que a construção pretendida seja muito difícil ou que exija muitos cálculos, o que pode torná-la proibitiva no tempo limitado de uma prova olímpica. Vejamos exemplos comparando essas estratégias.

Exemplo –
Se n for um inteiro positivo ímpar, então também n^2 será ímpar.

– Solução construtiva:
consistiria em mostrar que, para as *infinitas* possibilidades de n ($n = 1$, $n = 3$, $n = 5$, etc.), teríamos n^2 ímpar, o que é impossível fazer.

– Solução dedutiva:
todo ímpar é da forma $n = 1 + 2k$, com k inteiro; logo,
$$n^2 = (1+2k)^2 = 1+4k+4k^2 = 1+2(2k+2k^2) = 1+\text{par} = \text{ímpar}\,.$$

Exemplo –
Mostrar que todo número real r pode ser escrito como a soma de dois irracionais.

– Solução construtiva:
dividimos em dois casos: r racional e r irracional.
Se r for racional, uma decomposição é $(r-\sqrt{2}) + (\sqrt{2}) = r$. (Justifique as irracionalidades.)
Se r for irracional, usamos $\left(\frac{r+1}{2}\right) + \left(\frac{r-1}{2}\right) = r$. (Justifique.)

Exemplo –
Mostrar que vale uma fatoração da forma $x^3 + 1 = (x+1)(ax^2 + bx + c)$.

– Solução construtiva:
mostro a existência de $ax^2 + bx + c$ calculando o quociente de $x^3 + 1$ por $x + 1$.
– Solução dedutiva:
observo que -1 é raiz da equação $x^3 + 1 = 0$, logo vale uma fatoração da forma $x^3 + 1 = (x+1)q(x)$, onde $q(x)$ é um polinômio de grau 2.

Observe que a primeira solução calcula os valores de a, b, c e a segunda resolve o problema sem precisar fazer isso.

4).– Atitudes negativas, suas estratégias

Objetivam demonstrar que afirmação dada é falsa (não verdadeira). Também são de dois tipos:

- **por contraexemplo**, meramente achamos um exemplo para o qual a afirmação é falsa;
- **por contradição**, passamos a mostrar que se afirmação dada fosse verdadeira isso nos levaria a um resultado absurdo (tal como $1 = 0$, ou $x^2 > 1$ quando $0 < x < 1$, etc.)

Exemplo – (decisão negativa por contraexemplo)
Da fórmula $p(n) = n^2 - n + 41$ sempre resulta um número primo, se n inteiro positivo.

A experimentação tende nos levar a uma atitude positiva, pois $p(1) = 1^2 - 1 + 41 = 41$, $p(2) = 2^2 - 2 + 41 = 43$, $p(3) = 3^2 - 3 + 41 = 47$, $\ldots$, $p(7) = 7^2 - 7 + 41 = 83$, etc. Contudo, isso é ilusão, pois $p(41) = 41^2 - 41 + 41 = 41^2$ não é primo. Ou seja: $n = 41$ é um *contraexemplo* falsificando a afirmação do problema.

Exemplo – (pode ser difícil achar um contraexemplo)
Lá por 1640, Pierre Fermat observou que $1 + 2^{(2)} = 5$, $1 + 2^{(2^2)} = 1 + 2^4 = 17$, $1 + 2^{(2^3)} = 1 + 2^8 = 257$, $1 + 2^{(2^4)} = 1 + 2^{16} = 65\,537$ são todos números primos. Disso, conjecturou que

$$F(n) = 1 + 2^{(2^n)} \textit{ sempre é primo, se } n \textit{ for inteiro positivo.}$$

Como os valores de $F(n)$ crescem muito rapidamente, naquela época era muito dificil testar a veracidade dessa conjectura. Assim, passaram-se 100 anos, até que o grande matemático Leonhard Euler achou um *contraexemplo* da conjectura de Fermat, mostrando que $F(5)$ não é primo, pois tem fatoração não trivial:

$$F(5) = 1 + 2^{32} = 4\,294\,967\,297 = 641 \times 6\,700\,417.$$

(CURIOSIDADE: com o advento da Matemática Computacional baseada nos computadores eletrônicos, o que ocorreu com a Segunda Guerra Mundial, tornou-se tarefa de menos de um segundo verificarmos que $F(5)$ tem fatoração não trivial. Comprove isso usando um sistema de computação simbólica –tal como o `Maple`, `Mathematica`, `Sage`, ou `Maxima`–, para mostrar em menos de um segundo que $1 + 2^{64} = 274177 \times 67280421310721$, uma tarefa irrealizável até poucos anos atrás.)

Exemplo – (negativa por contradição)
Existe n inteiro positivo verificando $n^2 + 2n + 3 = n(n+1)$.
Antes de mais nada, entenda que é impossível mostrar diretamente a falsidade da afirmação, pois teríamos de fazer infinitas verificações: $1^2+2\times1+3 \neq 1(1+1)$, $2^2+2\times2+3 \neq 2(2+1)$, $3^2+2\times3+3 \neq 3(3+1)$, etc. Assim que teremos de mostrar a falsidade dessa afirmação por contradição.
Vamos lá. Se essa igualdade fosse verdadeira, teríamos $n^2 + 2n + 3 = n^2 + n$, a qual simplificada nos levaria à $n + 3 = 0$, o que é obviamente um absurdo, pois n é inteiro *positivo*.

Exemplo – (outra decisão negativa por contradição)
Existe um número real x tal que $x^4 < x < x^2$.
Com efeito, se essa afirmação fosse verdadeira, de $x^4 < x$ e do fato de que $x^4 \geqslant 0$, ela nos daria que x é positivo. Daí, dividindo a desigualdade dada por x, obteríamos $x^3 < 1 < x$, logo $1 < x$. Ora, multiplicando por nosso $x > 0$, de $1 < x$ seguem $x < x^2$ e $x^2 < x^3$, ou seja $x < x^2 < x^3$, o que é absurdo frente a $x^3 < 1 < x$, pois *ao mesmo tempo* teríamos $x < x^3$ e $x^3 < x$.

1.c

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS

5).– Dicas gerais para a resolução de problemas difíceis

Seguem-se algumas recomendações para a resolução de problemas olímpicos, baseadas principalmente nos livros de George Polya, reconhecido como uma das maiores autoridades mundiais no assunto.

• **Estude versões extremas do problema**

As vezes, em dificuldade para resolvermos um problema, podemos tratar de uma ou mais versões extremas dele, tais como quando todos os números envolvidos são iguais, ou casos envolvendo um número muito grande, ou muito pequeno, dos objetos envolvidos no problema, e mil e uma outras possibilidades. Além de isso sempre contar pontos, o exame desses casos extremos pode nos mostrar o caminho para resolver o problema geral.

Ainda nesta linha de pensamento, V. também pode pensar em *modificar* o problema, por exemplo, removendo ou acrescentando restrições visando obter uma versão mais fácil dele. Novamente, pode ocorrer que o estudo dessa versão modificada lhe traga uma ideia útil para resolver o problema original.

Exemplo –
Dois homens estão sentados numa mesa retangular, cada um com um saco de moedas de 10 centavos. Um deles coloca uma moeda na mesa, depois o outro faz o mesmo, e assim eles continuam, alternadamente. A regra do jogo exige que todas as moedas sejam colocadas deitadas e nunca sobre nenhuma outra já na mesa. O vencedor será quem poder colocar a última moeda, e ele ganhará todas elas. Supondo que cada jogador faça o melhor possível, quem ganhará o jogo?
Dica: o que V. poderia considerar como versões extremas desse jogo?

• **Pode ser mais fácil resolver o problema se o dividirmos em casos**

Com isso, queremos dizer que, em vez de tentarmos resolver um dado problema diretamente na forma com que ele é apresentado, pode ser muito mais viável dividí-lo em vários casos, cada um dos quais é fácil de resolver. Já encontramos um exemplo dessa situação quando mostramos que *todo número real pode ser escrito como a soma de dois irracionais*, dividindo esse problema em dois casos: o número dado é racional e o número dado é irracional.
Exemplo –
Mostre que $1+(-1)^n(2n-1)$ *sempre é múltiplo de* 4*, para* n *inteiro positivo.*
Dica: divida o problema em dois casos: n par e n ímpar.

• **Desenhe uma figura ou esquema resumindo os dados**
Esta é uma recomendação valiosa, principalmente em problemas com enunciado longo. A ideia é

que “uma figura bem feita pode valer mil palavras", o que facilitará a compreensão do problema e talvez até sugira um caminho para resolvê-lo.

Exemplo –

Zé Bobão estava caminhando sobre os trilhos de trem, e já tinha atravessado 45% *de uma ponte férrea quando ouviu o apito de um trem que chegava por trás dele. Independentemente de Zé continuar caminhando para frente, ou para trás, ele percebe que consegue sair da ponte no momento exato que o trem chega. Sabendo que o trem vinha a* 60 *km/h, calcular a velocidade com que Zé caminha.*

Resp.: 6 km/h.

- **Pode ocorrer de ser mais fácil resolver o problema “do fim para o começo"**

Exemplo –

Zé foi a um festival de música que durou três dias. No primeiro dia, Zé gastou R\$ 3 com o ingresso, e a metade do que tinha com comes e bebes, e para voltar para casa gastou mais R\$ 3. Usando o dinheiro que tinha sobrado, Zé voltou no segundo dia e novamente pagou R\$ 3 de ingresso, gastou a metade do que sobrou com comes e bebes, e desembolsou mais R\$ 3 para voltar para casa. Repetindo a rotina no terceiro dia, ao chegar em casa viu que estava sem dinheiro. Pergunta-se: com quanto de dinheiro ele foi ao festival no primeiro dia?

Resp.: R\$ 63.

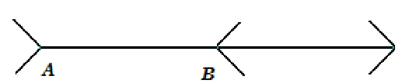
- **Cuidados na resolução de problemas geométricos**

Embora seja muito recomendável usar figuras, temos de estar alertas para não sermos enganados por elas. Tais enganos podem ocorrer de duas maneiras principais.

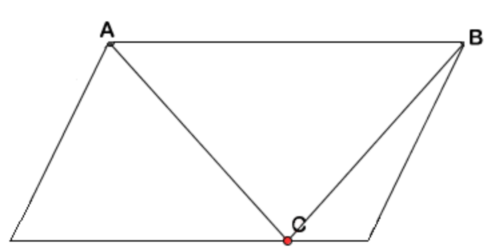
a). Muitas vezes fica difícil fazermos um desenho que exiba todas as características do objeto geométrico em estudo. Se nosso desenho for muito particular, é quase certo que acabaremos tirando alguma conclusão errada. O mesmo tende a ocorrer com desenhos feitos grosseiramente, ou por pessoa com pouca experiência.

b). Pode ocorrer que um dado desenho nos leve a uma ilusão geométrica, tal como achar que duas retas são concorrentes, quando na verdade são paralelas; podemos achar que um segmento x é maior que um segmento y, quando na verdade y é o maior deles. As figuras a seguir ilustram dois exemplos do que acabamos de alertar.

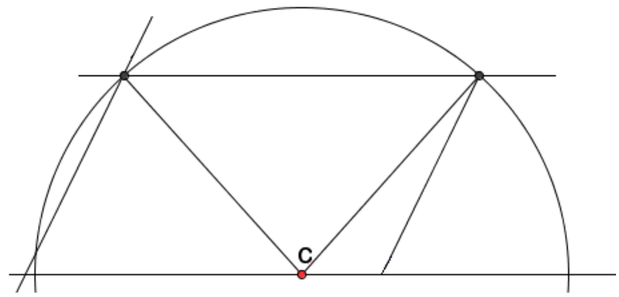
Olhando a figura abaixo, quem é o maior segmento: AB, *ou* CD*?*



E, para a próxima figura abaixo, quem é o maior segmento: CA, *ou* CB*?*



Examinando a figura seguinte, que explica como a anterior foi construída, V. mantém sua resposta?



• **Cuidado com o emprego de certas palavras**

Uma fonte muito comum de erros, principalmente quando da leitura do enunciado de um problema olímpico, ocorre com a interpretação errônea do significado das seguintes palavras:

todo, qualquer, um, necessário X suficiente, etc.

Exemplo –
São dois problemas completamente diferentes responder às questões seguintes: "Qual o menor número de movimentos <u>necessários</u> para fazer a construção X?"e "Qual o menor número de movimentos <u>suficientes</u> para fazer a construção X?". Independentemente de quem seja tal construção X, a primeira questão tem uma resposta trivial: um, enquanto que a segunda pode ser de resolução extremamente difícil, conforme a natureza de tal construção.

Também é preciso atentar para o fato de que algumas palavras têm um significado e uso no cotidiano que não corresponde perfeitamente ao que ocorre na Matemática. Por exemplo, no cotidiano empregamos a palavra círculo no sentido de curva, enquanto que na Matemática (na maioria dos livros nacionais da atualidade) é usada no sentido de superfície.

Além disso, cabe lembrar que a Matemática exige uma alta precisão que nem sempre existe na vida cotidiana (a não ser em algumas atividades como o Direito); assim, a expressão "o conjunto dos frutos daquela árvores" não é aceitável na Matemática (pois, "aquilo lá é um fruto ou ainda uma flor?"); ou seja, a palavra "conjunto" é usada na Matemática de um modo muito mais rigoroso e preciso do que na vida diária.

Para guardar!

✔ Embora conjecturar/chutar seja uma arte crucial e que deve ser constantemente aprimorada, ela está longe de ser suficiente para se ter sucesso nos problemas da ORM, pois será *exigido* demonstrar, e com clareza, tudo o que for afirmado.

✔ Em problemas olímpicos, *temos de ter duas atitudes*: positiva ou negativa. A segunda torna-se atrativa quando temos elementos para suspeitar da veracidade do que se pede demonstrar.

Para guardar!

✔ *Estratégias associadas às duas possíveis atitudes na resolução de problemas:*
– estratégias positivas: construção e dedução
– estratégias negativas: contraexemplo e contradição

✔ São *dicas muito úteis*, frequentemente aplicáveis:
– estudar casos extremos do problema
– pensar em dividir o problema em casos
– desenhar esquema ou figura que resuma as informações dadas no problema
– resolver o problema do fim para o começo

✔ São *cuidados obrigatórios*, para se evitar erros:
– fazer figuras cuidadosamente, em particular procurando manter proporções
– cuidado com o emprego de palavras, como todo X qualquer, necessário X suficiente.

TREINAMENTO OLÍMPICO

Problema 0 –
Ache infinitos números obedecendo ao padrão exibido por $(20+25)^2 = 2025$, $(30+25)^2 = 3025$, *etc.*

Problema 1 –
Achar o último dígito da expansão decimal de 2013^{2013}.

Problema 2 –
Mil e um problemas são feitos com a famosa sequência de Fibonacci: $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots$ *, que caracteriza-se por ter cada termo, a partir do terceiro, igual à soma dos dois anteriores. Aqui, tratemos de descobrir quantos múltiplos de* 4 *existem entre os primeiros mil termos da sequência.*
Dica: inicie estudando o quociente por 4 desses termos.

Problema 3 –
Um grupo de amigos gastou 43 min 12 seg para escalar 3/4 de uma montanha. Quando chegaram ao topo, viram que escalaram a segunda metade da montanha no mesmo tempo que gastaram para escalar a primeira. Ademais, gastaram 1min 36 seg menos tempo para escalar o último quarto da subida do que precisaram no terceiro quarto. Em quanto tempo escalaram a montanha?
Resp.: 56 min 32 seg.

Problema 4 –
Como solução do problema: "Achar uma sequência de infinitos números que inicie com $1 \quad 3 \quad 9 \quad 27 \quad 81 \quad 243$*", José apresentou* $a_{n+1} = 3a_n$ *(onde* $a_1 = 1$*), e Maria* $b_{n+1} = 1 + 2s_n$ *(onde* s_n *é a soma de todos os números que vão da primeira até a n-ésima posição). Pede-se mostrar que as sequências de José e Maria coincidem para os infinitos valores de* n.