8.

PROPORÇÕES GEOMÉTRICAS: SEMELHANÇA de FIGURAS

1).– Ideia de figuras semelhantes

Definição

Dizer que duas figuras (do plano ou do espaço) são ***semelhantes*** *é o mesmo que dizer que com movimentos rígidos (= translação, rotação ou reflexão), talvez seguidos de uma homotetia (= zoom de aumento, ou zoom de redução) podemos superpor exatamente uma sobre a outra.*

(Translações, rotações e reflexões são chamadas de *movimentos rígidos* pois movimentam a figura sem que haja alteração na distância entre seus pontos, o que não ocorre com os zooms.)

depois de uma rotação de 45° e um zoom de aumento:

Note que podemos trocar a ordem dos movimentos com os zooms, sem alterar o resultado final. Assim, no exemplo acima podíamos ter feito primeiro o zoom e depois a rotação.

No desenho abaixo, as figuras de mesma cor são semelhantes duas a duas:

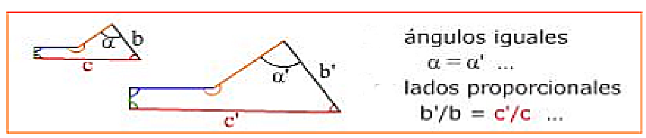
2).– Semelhança de polígonos e triângulos

O caso dos polígonos

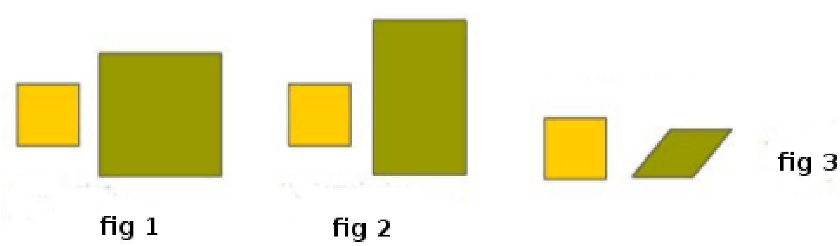
Observe que os ângulos de um polígono não mudam quando o transladamos, rotamos ou refletimos. Por outro lado, se um polígono sofrer um zoom, todos os seus lados ficarão aumentados ou diminuídos de um mesmo fator. Dessas duas observações segue que

Teorema –
Para podermos garantir que dois polígonos sejam semelhantes, é suficiente que sejam verificadas todas as duas seguintes condições:
- *os lados correspondentes são proporcionais*
- *os ângulos correspondentes são iguais.*

Exemplo
As duas figuras abaixo são semelhantes, uma vez que têm ângulos correspondentes iguais ($\alpha = \alpha'$, etc.) bem como seus lados estão em proporção ($a/a' = b/b' = c/c' = d/d' = e/e'$).



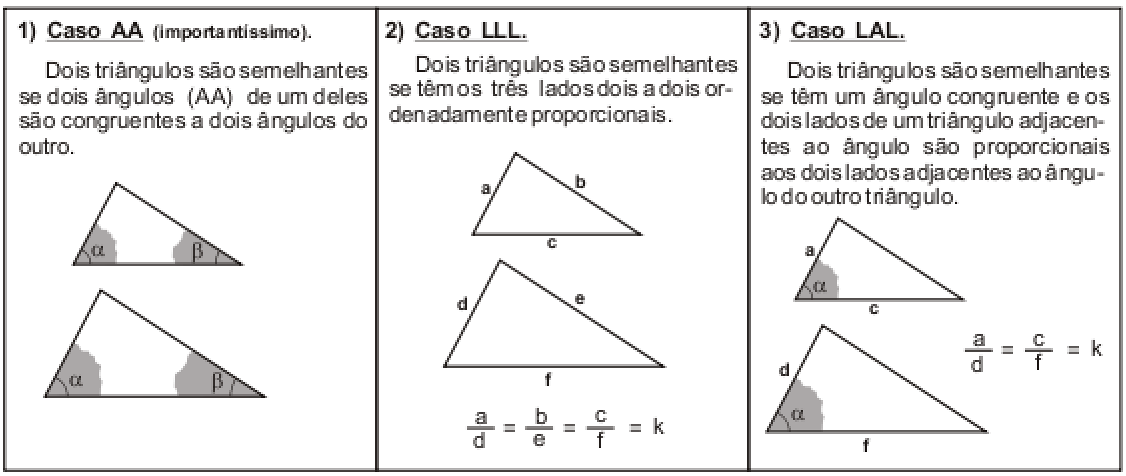
Exemplo
Abaixo estão exemplificados: um par (fig. 1) de figuras semelhantes (ângulos OK, lados OK), um par (fig. 2) de figuras não semelhantes (ângulos OK, mas lados não OK), e um outro par (fig. 3) de figuras não semelhantes (ângulos não OK, mas lados OK).



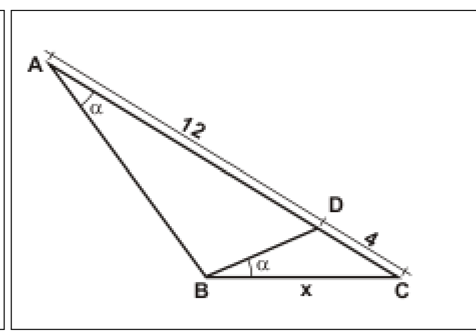
O caso particular dos triângulos

O Teorema de Thales dos Triângulos e o Teorema de Thales do Paralelismo podem ser vistos como dizendo que, no caso particular de polígonos triangulares, basta verificarmos uma das duas condições do teorema anterior para podermos garantir a semelhança de dois triângulos. O teorema seguinte resume e sistematiza isso.

Teorema
Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, existir entre eles uma das seguintes combinações de ângulos congruentes e lados proporcionais:



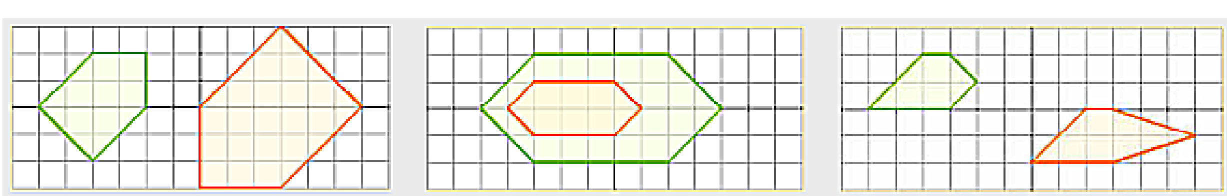
Exercício -
Determinar o valor do comprimento $x = BC$ na figura ao lado.
Sugestão: verifique que existem dois triângulos semelhantes (um deles é ABC), aplique o caso AA, escreva a correspondente proporção entre os lados e dela deduza que $x = 8$.



– Exercícios de revisão –

Procure resolver cada exercício abaixo antes de ler a respectiva resposta.

Exercício
Quais pares de figuras abaixo são semelhantes? Responda justificando.



Resp.:
a). Sim, pois os ângulos são iguais e os lados correspondentes estão numa proporção de razão 2:3.
b). Não, pois embora os ângulos sejam iguais os lados correspondentes não são proporcionais.
c). Não, pois existem ângulos correspondentes diferentes.

Exercício
Podemos garantir que um triângulo com um ângulo de $30°$ *e um outro de* $40°$ *é obrigatoriamente semelhante a um outro triângulo com um ângulo de* $30°$ *e um outro de* $110°$ *?*
Resp.:
Sim! Relação com o fato de que a soma dos ângulos de um triângulo vale 180°?

Exercício
Um triângulo de lados medindo 3, 6 e 7 cm é semelhante a outro de lados 9, 18 e 21 cm? E quanto a um quadrilátero de lados 3, 4, 5 e 6 cm relativamente a um outro de lados 6, 8, 10 e 12 cm?
Resp.:
a). Sim, pelo teorema caso LLL.
b). Não, pois embora haja proporcionalidade dos lados, como temos um polígono de mais de três lados, também teríamos de ter igualdade dos ângulos correspondentes.

Exercício
Num primeiro triângulo há um ângulo de $20°$ *e os respectivos lados medem 6 e 15 cm. Num segundo triângulo também existe um ângulo desse valor formado por lados de 4 e 10 cm. Há semelhança?*
Resp.:
Sim, pelo caso LAL do teorema acima.

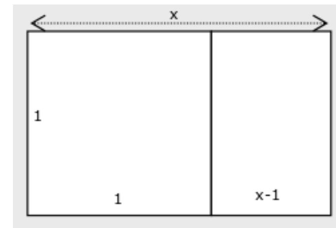
Exercício
Para polígonos regulares, basta verificarmos que dois deles têm o mesmo número de lados para podermos afirmar que são semelhantes?
Resp.:
Sim! Use que, para polígonos regulares, o ângulo interno α em cada vértice verifica $\alpha + \frac{360°}{n} = 180°$, e que os lados são proporcionais. Por quê?

Exercício
Podemos afirmar que dois triângulos retângulos são semelhantes quando tiverem um mesmo ângulo agudo igual? Justifique sua resposta.
Resp.:
Sim! Use AA.

Exercício
Denominamos ***retângulo áureo*** *todo retângulo tal que cortando o quadrado formado com seu lado menor resulta um retângulo semelhante. Pede-se mostrar que em todo retângulo áureo é constante a razão entre o comprimento de seus lados, e que essa razão é o* ***número de ouro*** $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Resp.:

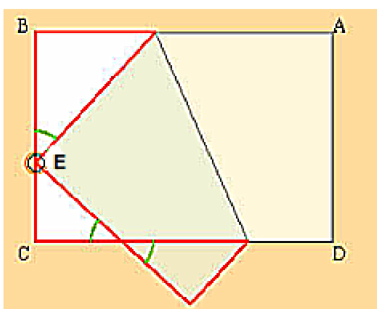
Basta considerar a figura ao lado, e dela tirarmos a proporção $\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1}$ a qual nos leva à equação $x^2 - x - 1 = 0$. Resolvendo-a, obtemos como valor de x o número de ouro. Confira.



Exercício

Se dobrarmos uma folha de papel retangular, como mostrado na figura abaixo, por que obtemos três triângulos semelhantes?

Resp.:



Há semelhança pois os ângulos correspondentes são iguais, logo podemos aplicar o caso AA do teorema. Com efeito, todos os três são triângulos retângulos; nos dois triângulos inferiores os ângulos marcados são iguais, pois que opostos pelo vértice, e o ângulo marcado em E é igual a estes dois, pois ele tem como complemento o complemento de um dos ângulos marcados nos triângulos inferiores.

3).– Razão de semelhança

Ao passarmos de uma figura α para uma figura β a ela semelhante, as eventuais translações, rotações e reflexões não alteram distância entre pontos, evidentemente. Assim que todas as eventuais modificações de distâncias serão devidas ao zoom realizado. Por isso, podemos dizer que a figura α é semelhante à figura β significa dizer que a cada ponto P de α corresponde exatamente um ponto P' de β, e vice-versa, e isso de modo que a razão entre a distância entre cada dois pontos A' e B' da segunda para a distância entre os dois pontos correspondentes, A e B, da primeira tenha um valor constante:

$$\frac{A'B'}{AB} = m \text{ (uma constante)} \qquad \text{ou} \qquad A'B' = m \cdot AB\,.$$

Essa constante m é a **razão de semelhança** entre a figura α e a figura β.

Quando $0 < m < 1$ há uma redução ao passarmos da figura α para a β; quando $m > 1$ há um aumento e quando $m = 1$ as duas figuras têm o mesmo tamanho.

Exercício

Partindo de um triângulo retângulo de catetos 3 cm e 4 cm, desenhe um segundo a ele semelhante com razão 1/4. Calcule o comprimento da hipotenusa de cada um deles.

Resp.:

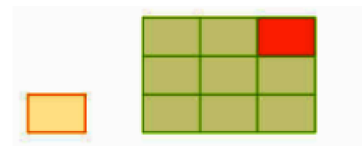
5 e 1,25

Área de figuras planas semelhantes

Sendo as figuras planas α e β semelhantes, e m sua razão de semelhança, então:

$$(\text{área de } \beta) = m^2 \cdot (\text{área de } \alpha).$$

Confira um exemplo muito simples ao lado.

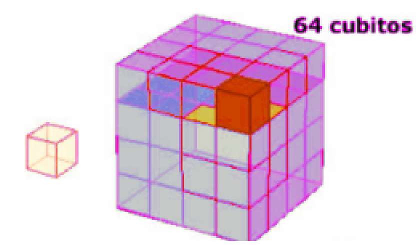


Volume de figuras espaciais semelhantes

Sendo as figuras espaciais α e β semelhantes, e m sua razão de semelhança, então:

$$(\text{volume de } \beta) = m^3 \cdot (\text{volume de } \alpha).$$

Confira um exemplo muito simples ao lado.

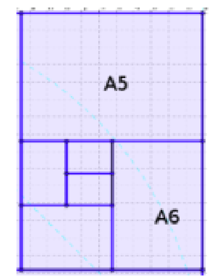


Exemplo (ORM 2013)
A Empresa X comercializou imagens do mascote da Copa/2014. Fizeram uma primeira imagem de 25 cm de altura que pesou 2 kg. O dono da empresa achou muito pesada e mandou fazer uma nova imagem com a metade da altura. Sendo que o material usado foi o mesmo, qual o peso da segunda imagem?
Resp.:
As imagens são figuras semelhantes, pois representam o mesmo mascote. Como a altura ficou a metade, a razão de semelhança é $1/2$, e assim o volume do novo mascote é $(1/2)^3$ do original, ou seja $1/8$ do original. Como o material dos dois mascotes é o mesmo, o peso é diretamente proporcional ao volume, logo o novo mascote pesa $2 \times 1/8 = 0,25$ kg.

Exercício
Denotemos por α a maquete (modelo em escala reduzida) de uma ponte β a ser construída com concreto. Sendo que cada metro da maquete corresponde a 200 m de ponte, e sabendo que por imersão em água se mediu em 412 cm^3 o volume da maquete, pede-se o volume de concreto que será preciso para construir a ponte (ou seja: pede-se o volume da ponte).
Resp.: aproximadamente 3300 m^3.

Exercício
Maria quer desenhar a Torre Eiffel numa folha de papel A4 (= 21 cm por 29.7 cm). Usando a Internet, ela viu que a torre tem aproximadamente 324 m de altura e que a abertura de seus pés é de 125 m. Se a torre desenhada ocupar toda a folha em altura, com que abertura ficarão os pés no desenho de Maria?
Resp.: 11.48 cm.

Exemplo
Se dobrarmos ao meio, e ao longo do lado maior, uma folha de papel A4, obtemos duas folhas de tamanho A5; se dobrarmos ao meio, e ao longo de seu lado maior, uma folha A5, obtemos duas folhas A6; e assim por diante. Todas essas folhas de papel têm a mesma forma, mas o tamanho é diferente. Confira a ideia na figura ao lado.
Neste caso, a razão de semelhança é um fator de redução. Ache seu valor.



Sendo a e b a altura e largura da folha de papel (então $a > b$), as duas semifolhas derivadas têm altura b e largura $a/2$, que devem verificar a proporção

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a/2} \quad \therefore \quad \frac{a^2}{2} = b^2 \quad \therefore \quad a = \sqrt{2}\, b \quad \therefore \quad m = \sqrt{2}.$$

Para a folha A4, temos largura = $b = 21$ cm, de modo que sua altura é $a = 21 \times \sqrt{2} \simeq 29,699$ cm.

Exercício
Acima, demos as dimensões da folha A4 $(21\sqrt{2}, 21)$. *A partir dela, deduza as dimensões das folhas A3, A2, A1 e A0. Constate que a área da A0 vale aproximadamente 1 metro quadrado. (A rigor, vale* $84 \times 84\sqrt{2} \simeq 9978\ cm^2$*).*

4).– Escalas

Principalmente no caso de mapas e maquetes, em vez da noção de razão de semelhança é tradicional se usar a ideia de *escala*. Nesses casos, dizemos que a figura original (o terreno, o edifício ou outro objeto) foi reduzido para um mapa ou maquete na na **escala** 1: k (onde k tipicamente é uma potência de 10) se cada um metro no mapa/maquete corresponde a k metros na figura original.

Relação entre a escala e a razão de semelhança: como cada comprimento L no terreno/objeto corresponde a um comprimento L' no mapa/maquete, tal que L' = m L, temos 1 = mk, logo m = 1/k.

Por exemplo, fazer um mapa na escala 1:100 equivale a fazer um mapa no qual cada metro no mapa corresponde a 100 m no terreno, ou em termos mais práticos: cada centímetro no mapa corresponde a 100 cm = 1 m no terreno. O coeficiente de proporcionalidade é m = 1/100 = 0,01.

Exemplo
Maria fez uma foto de uma árvore de 15 m de altura. Em sua foto a árvore mede 5 cm, logo a escala da foto é 0.05/15 = 5/1500 = 1/300 = 1:300.
(NOTE que a escala não é 5/15 !)

> *Quando trabalhamos com escalas, obrigatoriamente usamos a mesma unidade de medida para o objeto real e o objeto representado.*
> *As Normas Técnicas Brasileiras (ABNT) exigem que as escalas sejam expressas com fatores de 1, 2 ou 5. Exemplos típicos:*
>
> *1:1000, 1:100, 1:10, 1:1*
> *1:2000, 1:200, 1:20, 1:2*
> *1:5000, 1:500, 1:50, 1:5.*

Exemplo
Um campo oficial de futebol é um retângulo de 90m × 120 m. Qual seria o comprimento de um campo semelhante que tem 54 m de largura? Qual a escala?
Resp.:
A escala é $54/90 = 3/5$. O comprimento pode ser achado pela relação de semelhança: $120/90 = c/54$, logo $c = 54 \times 120/90 = 72$ m. Também podemos achar o comprimeno multiplicando o comprimento 120 do campo oficial pela escala. Por quê?

Exercício
Maria quer desenhar a Torre Eiffel numa folha de papel A4 (21 cm por 29.7 cm). Usando a Internet, ela viu que a torre tem aproximadamente 324 m de altura e que a abertura de seus pés é de 125 m. Se a torre desenhada ocupar toda a folha em altura, com que abertura ficarão os pés no desenho de Maria?
Resp.: 11.48 cm.

Exercício (ORM-2012)
Duas caldeiras industriais semelhantes têm área total de 40 e 160 m^2, respectivamente. Sabendo que a segunda tem capacidade de 3 400 m^3, calcular a capacidade da primeira.
Resp.:
Solução 1: raciocinando com razão de semelhança.
Os valores das áreas permitem calcular a razão de semelhança da primeira para a segunda caldeira como sendo 2. Logo o volume da segunda é 8 vezes o da primeira, ou seja: $3400 = 8 \times V_1$, de modo que $V_1 = 3400/8\ \mathrm{m}^3$.

Solução 2: raciocinando diretamente com proporções.
$A \propto L^2$, logo $A_1/A_2 = L_1^2/L_2^2 = 1/4$, de modo que L_1 é a metade de L_2. Daí, como $V \propto L^3$, e então $V_1/V_2 = L_1^3/L_2^3 = (L_1/L_2)^3 = 1/8$, segue que $V_1 = V_2/8 = 3{,}400/8\ \mathrm{m}^3$.

Solução 3: raciocinando com escalas.
Fica como exercício para casa.