2. RACIOCÍNIO EMPÍRICO x DEDUTIVO

A mensagem básica desta lição:
Experimentar não é demonstrar! A Matemática não aceita raciocínios empíricos!

Se uma afirmação matemática (o enunciado de um problema ou uma conjectura) envolver *infinitos casos*, a verificação positiva de alguns, ou mesmo muitos deles, não é suficiente para nos permitir afirmar sua veracidade. A Matemática só aceita afirmações absolutamente certas. Logo, para afirmarmos a veracidade de uma infinidade de casos é necessário demonstrarmos a veracidade de todos eles; isso só pode ser feito de uma maneira estritamente dedutiva, jamais com uma estratégia empírica.

Essa mensagem tem sutilezas:

- estratégias empíricas (exame de casos particulares via cálculos, desenhos, etc.) são recursos válidos e importantes para **negativar** qualquer afirmação matemática, *até mesmo as que envolvem infinitos casos*, pois bastará achar um **contraexemplo**;
- estratégias empíricas são perfeitamente válidas para **positivar** afirmações matemáticas *envolvendo apenas um número finito de casos*; contudo, jamais poderão ser usadas para positivar afirmações envolvendo infinitos casos ou situações, pois exigem uma estratégia *dedutiva*;
- estratégias empíricas sempre são recursos válidos e importantes como **heurística**, como um recurso para orientar nossa intuição sobre a validade de qualquer tipo de afirmação matemática, e até nos sugerir um caminho para decidir sua eventual validade, positiva ou negativa.

Para tornar tudo isso bem claro, vejamos alguns exemplos típicos.

Exemplo 1
Todos os números da forma $f(n) = n^2 - n + 41$ *são primos.*
– Resolução empírica errada.
Para $n = 1, 2, 3, \ldots, 20$ os valores de $f(n)$ são, respectivamente: 41 43 47 53 61 71 83 97 113 131 151 173 197 223 251 281 313 347 383, todos os quais se verifica serem primos. Testando mais alguns valores, temos: $f(25) = 641, f(33) = 1097$ que também são primos e assim concluímos que todos os infinitos valores $f(n)$ são primos.

– Resolução empírica correta.
Um aluno um pouco mais paciente que o anterior se dispôs a calcular o valor de $f(n)$ até 100. Quando chegou em $n = 41$ obteve $f(41) = 1681 = 41 \times 41$, assim achando um contraexemplo, o que é bastante para negativar a afirmação.

– Resolução dedutiva; correta e olímpica.
Meramente observe que para $n = 41$ a expressão $n^2 - n + 41$ simplifica-se para n^2, de modo que $f(41) = 41^2 = 41 \times 41$ é um não-primo, o que negativa a afirmação do problema.

Exemplo 2
Nenhum número da forma $D(n) = 1 + 991\,n^2$ *é um quadrado (qualquer que seja o* n *inteiro* $\geqslant 1$*).*
– Resolução empírica errada, mas aparentemente muitíssimo plausível.
Com computador, constata-se que $D(n)$ nunca é quadrado para n indo de 1 até 1 000 000 000 000, daí se induzir que jamais dará quadrado, qualquer que seja o valor de n.

– Resolução empírica correta: contraexemplo determinado na força bruta
Um cálculo mais exaustivo constata que, se $n_0 = 12\,055\,735\,790\,331\,359\,447\,442\,538\,766 \simeq 12 \times 10^{27}$, então $D(n)$ não é quadrado de inteiro para nenhum $1 \leqslant n \leqslant n_0$, porém

$$\begin{aligned} D(1+n_0) &= 144\,032\,698\,557\,259\,999\,607\,886\,110\,560\,755\,362\,973\,171\,476\,419\,973\,199\,366\,400 \\ &= (379\,516\,400\,811\,930\,638\,014\,896\,080)^2, \text{ é um quadrado!} \end{aligned}$$

Exemplo 3

Existem infinitos números de Fermat primos? Ou seja, existem infinitos $P(n) = 1 + 2^{2^n}$ *primos?*

Mais uma vez, temos aqui uma questão envolvendo infinitos números, logo a abordagem computacional só seria viável para negativá-la (calculando um contraexemplo, um número de Fermat não primo). Por outro lado, se pretendermos positivá-la (ou seja, provar que a resposta é “sim") seremos obrigados a usar uma estratégia dedutiva. Esta conseguiria *contornar o exame direto da infinidade de casos* mostrando, por exemplo, que é impossível existir apenas uma quantidade finita de Fermat primos, ou mostrando que existe uma família especial de infinitos valores de n que dão $P(n)$ primo.

Esta questão tem se mostrado resistente tanto para a abordagem computacional como para a dedutiva. É um exemplo de questão ainda em aberto. Note que é fácil mostrar que $P(n)$ é primo para $n = 0, 1, 2, 3, 4$, mas sucessivamente mais demorado mostrar que $P(n)$ é composto para $n = 5, 6, 7, \ldots, 19$, a tal ponto que até hoje é desconhecida a natureza de $P(20)$.

Exemplo 4

Suponhamos que um certo problema envolva fazer um esboço cuidadoso do gráfico da função real de variável real expressa por $y = \frac{x}{1+2x^3}$.

– Resolução incorreta e muito comum por alunos

Consiste em fazer uma pequena tabela de valores da função, plotar os correspondentes pontos (x, y) em um sistema de coordenadas cartesianas e então juntá-los por uma linha que aparente seguir a tendência. Seguem as tabelas e gráficos que dois alunos fizeram.

(-3, 0.057)
(-2, 0.13)
(-1, 1.0)
(0, 0.0)
(1, 0.33)
(2, 0.12)
(3, 0.055)

(-3, 0.057)	(0.5, 0.40)
(-2.5, 0.083)	(1, 0.33)
(-2, 0.13)	(1.5, 0.19)
(-1.5, 0.26)	(2, 0.12)
(-1, 1.0)	(2.5, 0.078)
(-0.5, -0.67)	(3, 0.055)
(0, 0.0)	

– Resolução correta

Envolve determinar domínio, eventuais singularidades, sinais e comportamento no infinito da função. Confira os detalhes em suas anotações de aula.

Resumo

Supondo que tenhamos de decidir a veracidade de uma afirmação matemática.

– **Para negativar** basta achar um contraexemplo.

– **Para positivar** seremos obrigados a usar um raciocínio estritamente dedutivo, exceto se a afirmação envolver apenas uma quantidade finita de casos.

Exercícios para aula e casa

Exercício

Qual a diferença de estratégia a adotar para enfrentar os dois seguintes problemas?

a). Qual o primeiro n *dando* $n^2 - n + 41$ *não-primo?*
b). Existem infinitos n *dando* $n^2 - n + 41$ *não-primo?*

Exercício

Escolhido um inteiro $N \geqslant 1$, *sua* sequência de Syracuse-Collatz *inicia com* N *e os demais termos são sucessivamente gerados pela seguinte regra: se o último termo conhecido for par, então o próximo é sua metade; caso contrário, o novo termo valerá um somado com o triplo do último. Exemplo: a sequência de Syracuse de* $N = 14$ *é* $14, 7, 22, 11, 34$, *etc.*

a). Prove: em tais sequências, ou nenhum elemento é igual a um, ou existem infinitos iguais a um.
b). A Conjectura de Syracuse-Collatz afirma que a primeira alternativa acima nunca ocorre. Verificar empiricamente que isso é verdadeiro para $N = 1, 2, 3, 4, 5$. *Após, acessando a web, verifique até que valor de* N *essa conjectura foi confirmada. Confirme com* $N = 871$.
c). Segundo fontes confiáveis na web: essa conjectura já foi decidida?
d). Ainda segundo a web, que exemplos de técnicas matemáticas têm sido usadas na investigação desse problema de formulação tão elementar e simples?

Exercício

Como recursos computacionais poderiam ser usados no auxílio de uma abordagem dedutiva para positivar uma afirmação matemática envolvendo infinitos casos?

Exercício

a). Mostre que nem $6^3 + 1$ *e nem* $2^{12} + 1$ *são números primos.*

b). Prove: se n *for inteiro positivo divisível por um inteiro* ***ímpar*** $\geqslant 3$*, então* $2^n + 1$ *não é primo.*

c). Conclua que se $2^n + 1$ *for primo, então* n *é uma* ***potência de 2****.*

d). Qual a relação entre o item anterior e os números de Fermat. Seja detalhado.

e). Resuma seus resultados.