3. DEMONSTRAÇÕES POR ABSURDO

O objetivo maior desta lição
é apresentar e exemplificar um dos métodos de demonstração que fazem parte da "maleta de trabalho" de todo estudioso da Matemática: o método da *demonstração por absurdo*, também denominado método da *demonstração por contradição* ou da *redução ao absurdo*.

1). O problema a resolver

é provar a veracidade de uma afirmação tipo: "se valer **H**, então vale **T**", a qual também se escreve abreviadamente como "$\mathbf{H} \Rightarrow \mathbf{T}$" e onde **H** e **T** são tradicionalmente denominadas, respectivamente, *hipótese* e *tese* da afirmação e representam condições, propriedades, expressões algébricas, etc.

Exemplos

"Se o quadrado de um número inteiro for ímpar, então esse número também é ímpar". O que podemos abreviar como: $(n \in \mathbb{Z}$ e n^2 ímpar$) \Rightarrow (n$ ímpar$)$.

"Se a é um número racional e b irracional, então $a+b$ é irracional", ou "$(a$ racional e b irracional$) \Rightarrow (a+b$ irracional$)$.

Note que essa afirmação também poderia ter sido enunciada de modo diferente do formato $\mathbf{H} \Rightarrow \mathbf{T}$, por exemplo dizendo: "a soma de um número racional com um irracional produz um irracional".

2). Demonstração por absurdo, uma maneira de resolver nosso problema

Para provar a veracidade de uma afirmação, uma demonstração por absurdo mostra que a falsidade da afirmação produziria um absurdo. Mais precisamente, no caso de uma implicação $\mathbf{H} \Rightarrow \mathbf{T}$, uma demonstração por absurdo consiste em, supondo a validade de **H**, mostrar que a <u>não</u> validade de **T** produz um resultado contraditório ou absurdo. Dizendo de outro modo: o objetivo é mostrar que a combinação da validade da hipótese **H** com a <u>não</u> validade da tese **T** produz um resultado absurdo.

Infelizmente, neste tipo de demonstração não se pode prever qual o absurdo que encontraremos, pois esse variará com o problema. Possíveis exemplos: "um certo número é tanto par como ímpar", "uma variável do problema seria, ao mesmo tempo, positiva e negativa", etc.

3). A base lógica das demonstrações por absurdo

O que nos garante que a ideia de demonstração por absurdo é logicamente correta? A garantia é dada pelo *Princípio do Terceiro Excluído*, o qual diz que cada propriedade matemática ou é verdadeira ou é falsa, não há uma terceira possibilidade.

4). Exemplos modelo

Exemplo 1

Se a é um número racional e b um irracional, então a soma $a+b$ é irracional.

Prova por absurdo.

Nossa tese é $\mathbf{T} = (a+b$ é irracional$)$. Dizer que ela é falsa é dizer que $a+b$ é um número racional c (pois estamos tratando de números reais). Ora, de $c = a+b$ tiramos $b = c-a$, o que implicaria b ser racional (pois seria a diferença de dois racionais). Resumindo, chegamos ao absurdo: b é irracional (da nossa hipótese) e também racional (consequência obtida ao supor $a+b$ ser racional, junto com a parte da hipótese que afirma a ser racional).

Exemplo 2

Se n é um número inteiro e seu quadrado é ímpar, então n também é ímpar.

Prova por absurdo.

Se n não for ímpar, ele terá de ser par e então da forma $n = 2k$, para algum inteiro k. Logo, teríamos $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2 \cdot 2k^2 =$ par. Ou seja, teríamos ao mesmo tempo que n^2 é ímpar (esta é a hipótese da afirmação) e par. Um absurdo.

Probleminha 1
Adapte o raciocínio do exemplo anterior para mostrar que "se o quadrado de um número inteiro é par, então este inteiro também é par".
Exemplo 3
No universo dos números reais: $x^2 + 2x + 3 \neq (x+1)^2 - 5$.
Prova por absurdo.
Embora desnecessário, coloquemos este problema na forma "$\mathbf{H} \Rightarrow \mathbf{T}$", ou "se $\mathbf{H}$, então $\mathbf{T}$". Fica assim: $x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2 + 2x + 3 \neq (x+1)^2 - 5$. Consequentemente, teremos de demonstrar a impossibilidade de valer $x^2+2x+3 = (x+1)^2-5$ para algum $x \in \mathbb{R}$. Ora, se isso valer, então $x^2+2x+3 = (x^2+2x+1)-5 = x^2+2x-4$, de modo que um cancelamento daria $3 = -4$, um absurdo.
Exemplo 4
Num conjunto infinito U, todo subconjunto finito tem como complemento um conjunto infinito.
Prova por absurdo.
Denotando por A o subconjunto finito e por B seu complemento, a relação $U = A \cup B$ mostra que a possibilidade B finito levaria à conclusão U finito (pois seria a união de dois conjuntos finitos), o que contradiz a hipótese U infinito.

5). Comentários sobre as demonstrações por absurdo

- Suponha que temos uma implicação $\mathbf{H} \Rightarrow \mathbf{T}$ verdadeira, *mas que ainda não sabemos isso* e que, por sugestão infeliz, tentemos mostrar que ela é falsa, em vez de verdadeira, e que o método que empregamos seja o da demonstração por absurdo. Se em nosso raciocínio cometermos um engano (por exemplo, um erro de cálculo), muito provavelmente esse nos levará a um absurdo e assim estaremos concluindo *erroneamente* que $\mathbf{H} \Rightarrow \mathbf{T}$ é falsa!
- Quando conseguimos provar a veracidade de uma implicação $\mathbf{H} \Rightarrow \mathbf{T}$ tudo o que fazemos é mostrar que é impossível a tese $\mathbf{T}$ ser falsa (supondo valha a hipótese $\mathbf{H}$). Ou seja, não estamos dando uma real razão da tese ser verdadeira (como, por exemplo, ser consequência de alguma propriedade). Por isso se diz que as demonstrações por absurdo não são causais.

6). Outros exemplos

Seguem-se exemplos de maior dificuldade e que nem sempre serão apresentados no formato $\mathbf{H} \Rightarrow \mathbf{T}$. Todos devem ser resolvidos por absurdo e o respectivo raciocínio aqui será apenas esboçado, ficando os detalhes para a aula.
Exemplo 5
Se os conjuntos A, B, C forem tais que $A \subset B$ e $B \cap C = \emptyset$, então $A \cap C = \emptyset$.
Exemplo 6
A diferença dos quadrados de dois inteiros positivos nunca pode ser a unidade.
Prova. Se m, n inteiros positivos derem $m^2 - n^2 = 1$, explore a fatoração $m^2 - n^2 = (m+n)(m-n)$ para concluir o valor que deveriam ter $m+n$ e $m-n$ e disso deduzir os valores contraditórios que teriam de ter m e n.
Exemplo 7
Sempre que tivermos um número inteiro cuja representação decimal tem na casa das unidades um algarismo dentre $2, 3, 7, 8$ poderemos afirmar que esse número não é um quadrado perfeito.
Dica. Quais são os algarismos da casa das unidades de um quadrado?
Exemplo 8
Mostrar que a equação $x^2 + x + 1 = y^2$ não tem soluções x, y inteiras positivas.
Exemplo 9
Em cada casa de um tabuleiro 7×7 escreve-se exatamente um número tirado da lista $1, 2, 3, \ldots, 49$. A seguir, calcula-se a soma dos números de cada linha e a soma dos números de cada coluna do tabuleiro. Indiquemos por P a soma de todas as somas pares e por I a soma de todas as ímpares. Pergunta-se se é possível ocorrer $P = I$.
Dica: trabalhe com $P + I$, procurando deduzir um absurdo.

7). Os exemplos mais conhecidos de provas por absurdo

Exemplo famoso 1 (Hippasos c. 450 AC)
Mostrar que $\sqrt{2}$ é um número irracional.
Se $\sqrt{2}$ não fosse irracional teríamos $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, com a, b inteiros sem fator comum. Disso resultaria $a^2 = 2b^2$, de modo que a seria um número par. Então, $a = 2k$ para algum inteiro k, de modo que teríamos $a^2 = 4k^2$. Daí $2b^2 = a^2 = 4k^2$, de onde se tiraria $b^2 = 2k^2$, ou seja que o quadrado de b seria um número par, logo b também teria de ser par (vide Probleminha 1). Resumindo, chegaríamos à conclusão absurda: a e b ambos pares e ao mesmo tempo sem fator comum.

Exemplo famoso 2 (Euclides c. 300 AC)
Existem infinitos números primos.
Raciocinemos por absurdo. Se existisse apenas uma quantidade finita de primos, $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$, calculemos seu produto e consideremos o número $p = 1 + p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_n$. Ele não tem nenhum fator primo (pois obviamente nenhum dos quocientes $p/p_1, p/p_2, p/p_3, \ldots, p/p_n$ dá resultado inteiro), o que contradiz o Teorema Fundamental da Aritmética que afirma que todo inteiro maior do que a unidade pode ser fatorado com números primos.

Resumo

Até agora, vimos duas maneiras de decidir a veracidade de uma afirmação matemática:
– para negativar: achar um contraexemplo.
– para positivar: fazer uma demonstração por absurdo.
(Atenção! Existem outros tipos de dedução que podem ser usados para positivar.)

Exercícios para aula e casa

Exercício
Decida a veracidade de cada implicação a seguir usando contraexemplo ou demonstração por absurdo, conforme for o mais adequado.
a). Se p e q são números irracionais, então $p+q$ é irracional.
b). Se pq é irracional, então ao menos um dos fatores é irracional.

Exercício
Na Universidade se prova que os números $\pi, e, \pi \cdot e$ são irracionais. Usando esses resultados,
a). prove que na lista $\pi + e$, $\pi - e$ existe ao menos um irracional;
b). prove que na lista $\pi + e$, $\pi^2 - e^2$ existe ao menos um irracional;
c). prove que na lista $\pi + e$, $\pi^2 + e^2$ existe ao menos um irracional.

Exercício
Se m, n são números inteiros verificando $n + n^2 + n^3 = m + m^2$, então n é par.

Exercício
Provar que a equação $x^2 - y^2 = 10$ não tem soluções inteiras positivas. E o que Vc. pode dizer quanto à equação $x^2 - y^2 = 25$? Compare.

Exercício
Adapte a demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$ para provar a de $\sqrt{3}$.

Exercício
Considere um número primo qualquer $p \geqslant 3$ e seja p' o primo consecutivo. Prove que $p + p'$ é o produto de três ou mais inteiros $\geqslant 2$, não necessariamente primos e não necessariamente distintos.
Dicas. Há um óbvio fator primo para $p + p'$, determine-o. Suponha, a seguir, que essa soma tenha apenas mais um fator.

Exercício
Quando a, b, c são números inteiros ímpares a equação $ax^2 + bx + c = 0$ não tem raízes racionais.

Exercício
Considere um inteiro ímpar $p \geqslant 5$ tal que uma certa potência inteira dele tem exatamente 20 dígitos em sua representação decimal. Prove que ao menos três desses dígitos são iguais.
Dica. Supondo falsa a tese, calcule a soma dos dígitos dessa potência.