LIÇÃO 1
Expressões verbais, geométricas e algébricas

A Álgebra nos permite resolver uma grande quantidade de problemas, entre os quais:

- expressar a *lei de formação* de um padrão ou uma regularidade (como a lei de formação de uma sequência de figuras semelhantes ou de uma sequência de números);
- escrever *fórmulas* com as quais expressamos a relação entre grandezas matemáticas ou físicas;
- escrever e resolver *equações* com as quais poderemos determinar o valor das grandezas desconhecidas de um problema matemático ou físico, a partir do conhecimento de grandezas mais acessíveis ou mais facilmente medíveis desse mesmo problema;
- reduzir um dado problema a um problema semelhante menor por meio de uma *recursão*;
- etc.

Para isso, antes de mais nada, precisamos conhecer com segurança uma ferramenta indispensável: **a notação algébrica**, assunto que será o tema das aulas da primeira parte deste minicurso.

0).– Álgebra como uma aritmética generalizada

Problema 1
Todo mundo sabe que os inteiros pares são $0, 2, 4, \ldots, -2, -4, -6, \ldots$ *, mas como poderíamos denotar um inteiro par qualquer?*
Por definição, os inteiros pares são os múltiplos de 2 , de modo que devemos ver a lista acima como

$$2 \times 0, 2 \times 1, 2 \times 2, 2 \times 3, \ldots, 2 \times (-1), 2 \times (-2), 2 \times (-3), \ldots$$

Consequentemente, podemos ver a geração de todos os pares como o processo de colocar os inteiros, um depois do outro, *dentro da caixa* da expressão: $2 \times \boxed{}$. A Álgebra faz isso de modo mais conveniente, escrevendo $2 \times n$, ou meramente $2n$, onde a letra n pode ser substituída por *qualquer* número inteiro que desejarmos, e somente por eles. Por isso, dizemos que tal letra está funcionando como uma *variável*.

Problema 2
A ideia de variável pode ser usada para denotar todo e qualquer inteiro ímpar?
Sim, basta observar que os ímpares $1, 3, 5, \ldots, -1, -3, -5, \ldots$ podem ser vistos como sendo gerados ao somarmos 1 a cada um dos pares, logo são os inteiros que podem ser escritos como $1 + 2n$ onde n é a variável que representa os números inteiros.

Problema 3
A utilidade da ideia de variável se resume em permitir uma escritura genérica?
Não! A importância maior da Álgebra é nos possibilitar operar com variáveis usando as mesmas operações que usamos com os números (pois variáveis representam números), ao mesmo tempo que continuam valendo as mesmas propriedades que governam as operações com esses (tais como

associatividade, comutatividade, distributividade, etc.). *Isso nos permite transformar problemas complicados em problemas mais fáceis de resolver.* Vejamos um exemplo bem simples.

Seja demonstrar que o produto de um par por um ímpar sempre produz um par.
Pelos problemas anteriores, o produto par × ímpar pode ser escrito algebricamente como $2n\times$ ímpar. Então, usando a propriedade associativa da multilicação, podemos transformar esse produto em

$$(2 \times n) \times \text{ímpar} = 2 \times (n \times \text{ímpar}) = 2 \times \text{um inteiro} = \text{um par}.$$

Em linguagem estritamente algébrica (ou seja: usando apenas números e letras), essa demonstração fica escrita como:

$$(2n)(1+2m) = 2\big(n(1+2m)\big) = 2k\,.$$

Importante, por que *precisamos* também usar as letras m e k?

Para que possamos ter condições de resolver problema mais difíceis, como problemas olímpicos, precisamos desenvolver sistematicamente as ideias acima. Isso é o que passaremos a fazer nesta e próximas aulas. Por enquanto, deixamos o seguinte desafio:
Problema desafio (para casa)
Somando 1 *ao produto de inteiros ímpares sucessivos, como* $1+3\times5=16$, $1+5\times7=36$, $1+7\times9=64$, *etc., parece que sempre o resultado é um múltiplo de* 4 . *Demonstre se isso é sempre verdade, ou não.*

1).– De expressão verbal para notação algébrica

Exemplos iniciais 1
Abaixo estão expressas (= traduzidas) em linguagem algébrica várias frases. Numa primeira leitura verifique que cada uma delas está correta. Depois, reescreva-as com outras letras que as já usadas.

"Um número aumentado de 7" → $x+7$
"Um número diminuído de 5" → $x-5$
"O triplo de um número" → $3x$
"A metade de um número" → $x/2$
"Três números consecutivos" → $x, x+1, x+2$
"Três números de mesma paridade consecutivos" → $x, x+2, x+4$
"O valor de x notas de 5 R\$" → $v = 5x$
"Um número é igual a ele mais 4" → $x = x+4$
"Um número é igual a um segundo número mais 4" → $x = y+4$
"Um número é o dobro de um segundo número" → $x = 2y$
"Um número é igual a 5 mais o triplo de um segundo número" → $x = 5+3y$
"A área A de um retângulo de lados ℓ e w" → $A = \ell w$
"O perímetro p do retângulo acima" → $p = 2\ell + 2w$.

Contraexemplos iniciais
O uso da linguagem algébrica requer cuidado e disciplina, sem o que facilmente cometeremos erros absurdos. Procurando alertar sobre isso, abaixo são dadas algumas tentativas de tradução em linguagem algébrica. Lendo-as com muito cuidado, explique por que cada uma das expressões dadas não é uma tradução fiel da respectiva frase.

"O perímetro de um quadrado" → $x = x+x+x+x$
"Três números pares consecutivos" → $x, x+2, x+4$
"Um número aumentado de 7 é igual a um segundo número" → $x+7 = x$
"Um número é a metade de um segundo número" → $x/2 = x$

Exercício

Usando as letras x, y e outras que forem necessárias, escrever em linguagem algébrica as afirmações seguintes. Em cada caso, explicitar o significado que V. escolheu para cada uma das letras que tenha usado.

a). Idade de Maria daqui a 12 anos.
b). A quarta parte de um número mais seu consecutivo.
c). A idade de uma senhora é igual a (o dobro da idade de seu filho) menos 5 anos.
d). Comprimentos dos lados de um retângulo cuja base tem 6 metros a mais que sua altura.
e). A soma do quadrado de um número com seu consecutivo.
f). O produto de um número por seu consecutivo iguala 10.
g). A diferença entre os quadrados de dois números consecutivos.
i). 25% de um número.
j). José é 5 anos mais moço do que Maria.
k). Subtrair 7 do quadrado do dobro de um número.

Problema

Denotando por x o número de ovinos (ovelhas + carneiros + cordeiros) de um rebanho, pede-se escrever com notação algébrica
a). o número de patas do rebanho;
b). o número de patas depois que morreram 6 ovelhas;
c). o número de ovinos depois de terem nascido 18 cordeiros;
d). o número de ovinos daqui a 2 anos, supondo que o crescimento do rebanho é de 25% ao ano.

Resp.:
(d) Pelo que V. aprendeu no cálculo de percentagens: $x \to 1,25x \to 1,25^2 x$. Outro modo, usando algebra diretamente: $x \to x + x/4 \to x + x/4 + (x + x/4)/4$.
Comprove que essas duas expressões se equivalem, no sentido de que sempre dão o mesmo valor numérico, qualquer que seja o x escolhido.

Problema

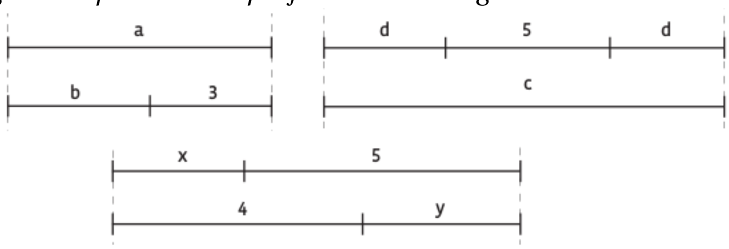
Beto tem 100 reais a mais que Ana; Carlos tem o dobro de Beto; Diana tem 400 reais a menos do que Carlos. Denotando por x o quanto tem Ana, escrever em termos de x o quanto tem cada um dos demais amigos.

Resp. parcial:
Diana tem 2(x+100)-400 reais.

2).– De expressão geométrica para notação algébrica

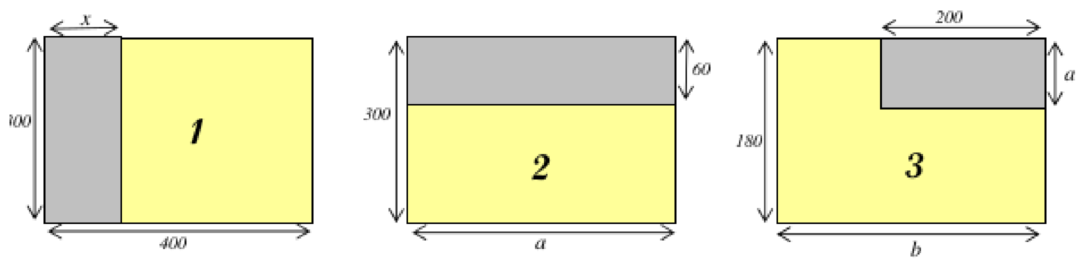
Problema

Abaixo, são dados três pares de figuras. Para cada par, expressar algebricamente a igualdade das somas das medidas dos segmentos parciais em que foi dividido o segmento total.



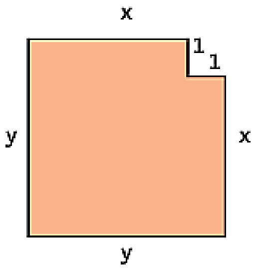
Problema

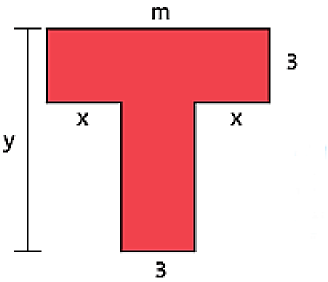
As figuras abaixo representam três salas, sendo que as partes em cor escura representam a superfície de um tapete. Indicando por A a área <u>não</u> atapetada da sala, pede-se:



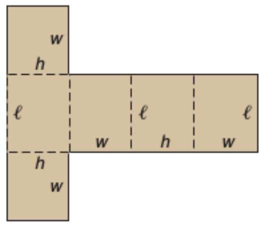
para cada sala, achar uma igualdade algébrica expressando a área A em termos de x, a, b .
(isso é o mesmo que dizer: "achar fórmula algébrica para a área A em termos de x, a, b .)

Problema
Para a primeira figura abaixo, escrever fórmulas para a área e para o perímetro em termos apenas de y. O mesmo para a segunda figura, agora considerando m como parâmetro. Neste segundo caso, explique a diferença de papel entre y e m.





Problema
Indiquemos por ℓ, w, h o comprimento das arestas de uma caixa de faces retangulares. Escrever o valor da área da superfície da caixa em termos desses comprimentos, tanto no caso da caixa ter topo fechado como no caso de topo aberto.



3).– De notação algébrica para expressão verbal ou geométrica

Exemplos iniciais 2
Nos Exemplos iniciais 1 vimos como escrever algebricamente uma expressão verbal. Agora, faremos o contrário: escrever em português o significado das seguintes expressões algébricas.
a). $1+\sqrt{x}$
b). $5x-2$, onde x representa o lucro no ano passado de uma empresa
c). $2n$
d). $2n, 2n+1, 2n+2$, onde n representa um número inteiro
e). $2n, 2(n+1), 2(n+2)$, onde n representa um número inteiro
Resp. parcial:
d). temos um número par, e depois o ímpar e o par que lhe sucedem.
e). dica: $2(n+1)=2n+2$ e interprete tudo em termos de números pares.

Exercício
Seja x o número de alunos de uma escola. Pede-se inventar uma história que conclua com uma interpretação verbal da expressão algébrica:

a). $x-52$ b). $x+20$ c). $x/2$

Exercício
Na sorveteria ABC, um sorvete custa c reais. Maria convidou amigas para ir lá, pediu sorvetes e entregou x reais no caixa da loja. Nesse contexto, detalhe o significado da expressão algébrica $x-3c$.

Exercício
Maria tem 3 cédulas de R\$ 10 a mais do que cédulas de R\$ 5. Achar interpretação para x dando significado simultâneo para as expressões algébricas: $x+3$ e $10(x+3)$.

Exercício
Em cada expressão algébrica a seguir, ache uma moeda ou cédula de dinheiro apropriada para interpretar: a). $25x$ b). $2(x+5)$ c). x e $1000-x$.

4).– Conceito de variável

A frase “tomemos o dobro de um número” pode ser traduzida matematicamente pela expressão algébrica $2n$, onde se entende que n representa o tal número que estamos considerando. Como não especificamos que número é esse, dizemos que n é uma **variável**, pois ela está sendo usada no lugar de *qualquer* número que possamos pensar.

De modo semelhante, no problema das ovelhas, a expressão algébrica $x + 18$ representa o número de ovelhas depois do nascimento de 18 cordeiros, e isso *qualquer* que seja a quantidade x de ovelhas no rebanho. Assim, novamente, x é uma variável.

Em geral, a palavra variável expressa a ideia de um número qualquer, de um número que no momento não interessa, ou ainda não sabemos especificar. Em termos precisos:

Variável
é toda letra que representa (= pode ser substituída por) qualquer número de um conjunto de números.

Parâmetros, constantes e coeficientes
São ou tipos especiais de variáveis que ocorrem em problemas matemáticos e em aplicações, ou noções associadas. Em uma próxima lição, teremos melhor oportunidade de discutí-los em detalhes.

Domínio de uma variável

Neste minicurso, trabalharemos apenas com problemas onde os possíveis valores das letras/variáveis envolvidas ficam restritos aos números reais. Frequentemente, encontraremos problemas onde o contexto nos obrigará a permitir que essas letras/variáveis possam assumir valores apenas num certo subconjunto dos reais, tais como o subconjunto dos reais positivos, ou o dos reais inteiros, ou o dos números racionais, etc. Por exemplo, num problema geométrico as variáveis comprimento, área, etc. têm seus valores restritos aos números reais positivos; numa aplicação física massas e densidades, por exemplo, também só podem assumir valores positivos.

*O **domínio** de uma variável é o conjunto dos números que ela representa (= que ela pode substituída por).*

Exemplo
No problema das ovelhas (recorde da Seção 1), a variável x que indica o número de ovelhas do rebanho tem como domínio o conjunto $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Note que $x = 0$ corresponde à situação “não temos mais ovelhas, e $x = 1$ à “temos apenas uma ovelha”. Note, ademais, que se levarmos em conta a possibilidade “morreram 6 ovelhas” automaticamente o domínio de x tem de ser corrigido para $\{6, 7, 8, \ldots\}$. Por que este conjunto inicia com 6, e não 7?

Exercício
Se escolhermos uma letra para denotar o resultado de um lance de dado, qual seria seu domínio? E para um par de dados?

Exercício crítico
Abaixo são dadas várias tentativas de se definir a ideia de variável. Examine-as com muito cuidado e explique por que são incorretas.

- ✔ ”Variável é um número que varia.”
- ✔ “Variável é uma quantidade que varia.”
- ✔ “Variável é toda quantidade que pode tomar sucessivamente diversos valores.”

5).– Conceito de expressão algébrica

Acima, V. já encontrou o uso informal/intuitivo da noção de *expressão algébrica*, vamos agora definí-la precisamente. Com esse conceito poderemos definir rigorosamente outros elementos básicos da Álgebra, tais como os de igualdade algébrica, equação algébrica e desigualdade algébrica, além do conceito de fórmula que também já encontramos informalmente.

> **Expressão algébrica**
> é todo resultado que obtemos ao combinar *números e letras, ou então apenas letras*, com um número finito de símbolos de operações algébricas.
> *Quais são tais operações algébricas?* Exclusivamente as quatro operações aritméticas e as operações de radiciação (extração de raiz quadrada, cúbica, etc.).

Alguns exemplos de expressões algébricas:

$$\frac{A}{2h}, \quad 1+x+2x^2-3x^3, \quad 2\pi r h, \quad \sqrt{a^2+b^2}, \quad \frac{a+bx}{c+dx}-1+2xy-\sqrt{1+(x-y)^2}.$$

Cuidado! Também existem expressões não algébricas!

Sempre que V. se defrontar com uma *operação não algébrica* V. já fica automaticamente proibido de usar a denominação "expressão algébrica"!
Quais são tais operações *não* algébricas? Os primeiros exemplos delas que se aprende na Escola Básica são as operações trigonométricas e exponenciais. Consequentemente, são exemplos de expressões *não* algébricas: $1+\operatorname{sen}(x)$, $\operatorname{sen}^2(1+x)-\cos^2(1+x)$, $a^2+b^2-2ab\cos(x)$, etc.

Exercício crítico
Este minicurso enfatiza a resolução de problemas. Porém, temos de alertar que o domínio deficiente da linguagem matemática básica, além de ser vergonhoso, facilmente pode levar a uma interpretação errônea do que é dado ou do que é pedido em um problema. Por isso, é importante que V. exercite sua capacidade crítica examinando se cada "definição" a seguir está correta, ou incorreta. Procure detectar erros outros que a omissão da restrição "número finito de símbolos".

- ✔ "Quando combinamos números e letras obtemos uma expressão algébrica."
- ✔ "Expressão algébrica é o que resulta ao combinarmos números e letras."
  (Em particular, diga qual a diferença entre esta definição e a anterior.)
- ✔ "Expressão algébrica é tudo o que é formado por números, letras e sinais usados em Matemática." (Inicie sua análise se questionando se $<$ é um sinal usado em Matemática, e se cos e log são sinais ou símbolos de operação algébrica.)
- ✔ "Expressões algébricas são expressões matemáticas que apresentam letras e podem conter números."
- ✔ "Expressão algébrica é toda expressão que contém letras."
- ✔ A definição dada por um livro qualquer do Ensino Fundamental.

Exercício crítico
Acrescente palavras adequadas, de modo a tornar correta a seguinte tentativa de definir a ideia de expressão algébrica: "Sequência de operadores e operandos descrevendo um cálculo a realizar."

6).– Expressões algébricas, igualdades algébricas e desigualdades algébricas

As expressões algébricas podem ser usadas isoladamente ou para fabricar objetos matemáticos mais complicados como igualdades e desigualdades algébricas. O quadro a seguir exibe exemplos e aponta o elementos diferenciador de cada.

expressão algébrica	$x^2 - y^2$	não tem sinal de igual e nem sinal de desigualdade
igualdade algébrica	$x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$	tem um sinal de igual, mas não de desigualdade
desigualdade algébrica	$\sqrt{xy} \leqslant \frac{x+y}{2}$	não tem sinal de igual, mas tem um de desigualdade

Nas próximas aulas, caracterizaremos precisamente as igualdades algébricas e veremos que existem vários tipos importantes delas: fórmulas, identidades e equações. Neste curso, não estudaremos desigualdades algébricas.

Observação
Nos exemplos e problemas que já vimos nem todas as respostas são expressões algébricas, pois algumas envolvem o sinal ou símbolo de igualdade (=), o qual não é símbolo de *operação* algébrica. Confira! Esses casos correspondem a *igualdades* algébricas ou a casos particulares dessas que denominamos *fórmulas* algébricas, assunto a ser estudado na próxima lição.

7).– Resumindo: conceitos essenciais desta aula

➤ **Operações algébricas**
são as quatro operações aritméticas, as operações de radiciação (extração de raiz quadrada, cúbica, etc.), e apenas essas operações.

➤ **Expressão algébrica**
é o resultado que se obtém ao combinarmos (de um modo matematicamente significativo e em um número finito de vezes) os seguintes elementos: números, letras e símbolos das operações algébricas.

➤ **Igualdade algébrica**
é o resultado de igualarmos duas expressões algébricas:
primeira expr. = segunda expr.

➤ **Desigualdade algébrica**
é o resultado da comparação via sinal de $<, \leqslant, >$, ou $\geqslant$ de duas expressões algébricas. Por exemplo:
primeira expr. $<$ segunda expr.

➤ **Fórmula algébrica**
é apenas um tipo especial de igualdade algébrica:
letra = expr. alg. com outra(s) letra(s).
Lembre que em outros cursos também se usa fórmulas não algébricas: trigonométricas, logarítmicas, etc.

➤ **Variável**
Por *variável* de uma expressão, igualdade ou desigualdade algébrica entende-se qualquer letra nela envolvida (que não seja símbolo de uma constante, como π, φ, etc.).

Problema para casa
José observou que algumas subtrações são muito fáceis, tais como $39 - 4 = 35$ *e* $78 - 2 = 76$*, mas muitas outras não o são e para estas ele descobriu um método:* $123 - 8 = 123 + 2 - 10 = 125 - 10 = 115$, $83 - 7 = 83 + 3 - 10 = 76$*, etc. Pede-se demonstrar se seu método funciona sempre, ou não.*

Problema para casa
Expressar o valor da área da figura ao lado de cada um dos seguintes modos:
1). em termos apenas de x e y ;
2). em termos apenas de b e m ;
3). em termos apenas de x e m .