# LIÇÃO 5
# Identidades algébricas

Dos três tipos básicos de transformações algébricas: decomposições, reduções e fatorações, os dois primeiros já foram estudados na lição anterior. Antes de passarmos ao terceiro tipo, as fatorações, precisamos estudar as identidades algébricas, pois estas são a base das principais técnicas de fatoração que serão vistas na próxima lição.



## 1).– Identidades algébricas notáveis de segundo grau

São ditas notáveis por serem as identidades mais usadas. É muito importante memorizá-las e estar sempre atento para a possibilidade de usá-las, mesmo que as aparências escondam isso.

- $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$
- $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$
- $(a^2-b^2) = (a+b)(a-b)$
- $(a^2+b^2)$ não tem fatoração com números reais.

**Demonstração**
Consiste, principalmente, em usar a distributividade.
Primeira: $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a(a+b)+b(a+b) = a^2+ab+ba+b^2 = a^2+2ab+b^2$ .
Segunda: é caso particular da primeira, $(a-b)^2 = \big(a+(-b)\big)^2 = a^2+2a(-b)+(-b)^2 = a^2-2ab+b^2$.
Terceira: iniciando com o produto, $(a+b)(a-b) = a(a-b)+b(a-b) = a^2-ab+ab-b^2 = a^2-b^2$.

**Exemplos**
- $x^2-1 = (x+1)(x-1)$
- $x^2+1$ não é fatorável com números reais
- $(a+b)^2+(a-b)^2 = 2(a^2+b^2)$
- $(a+b)^2-(a-b)^2 = 4ab$
- $(x+1)^2-(x^2+2x+1)(x+2) = (x+1)^2-(x+1)^2(x+2) = (x+1)^2\cdot\big(1-(x+2)\big) = (x+1)^2\cdot(-x-1) = -(x+1)^3$
- $(2x+1)(2x-1)-4x^2 = (4x^2-1)-4x^2 = -1$

**Exercício**
*Usando as identidades notáveis, completar as seguintes igualdades algébricas.*

- ➤ $(2x+1)(2x-1)-(x-1) = \square\big(4x-1\big)$
- ➤ $\left(\frac{1}{2}x-\square\right)^2 = \square - x+1$
- ➤ $(\square+\square)^2+b^2 = 1.01b^2+0,2bc+c^2$
- ➤ $(5x-\square)^2 = 5\big(5x^2-\square+2\big)$
- ➤ $(\square-\square)\cdot(\square+\sqrt{2}) = 4x^2-\square$
- ➤ $(\sqrt{3}\,x+\square)^2 = \square+\square+y^2$
- ➤ $(x-3)^2 = x^2\ \square$
- ➤ $(x+5)(x-5)+\ \square = x(x+1)$

**Exercício**
*Usando as identidades notáveis e calculando inteligentemente, mostre que*
$$(a+b+c)^2-(a-b+c)^2 = 4b(a+c)\,,\quad (a+b+c)^2-(a-b-c)^2 = 4a(b+c)$$
Dica: faça $x = a+b$ e $y = a-b$ .

**Exercício**
*De duas maneiras, calcule de cabeça o valor de* $21^2$ *. Dica: use* $(20+1)^2$ *e* $21^2-20^2$ .

## 2).– Outras identidades algébricas de uso comum

### Identidades notáveis de terceiro grau

- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

- $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
- $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$
- $a^3 + 1 = (a+1)(a^2 - a + 1)$
- $a^3 - 1 = (a-1)(a^2 + a + 1)$

**Demonstração**
Usaremos a distributividade, a regra das potências e as identidades notáveis de segundo grau.
Primeira: $(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2 = (a+b)(a^2+2ab+b^2) = (a^3+2a^2b+ab^2)+(ba^2+2ab^2+b^3) =$
$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.
Segunda: $(a-b)^3 = (a-b)(a-b)^2 = (a-b)(a^2-2ab+b^2) = (a^3-2a^2b+ab^2)-(ba^2-2ab^2+b^3) =$
$= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.
Quinta: $(a+1)(a^2-a+1) = (a^3-a^2+a)+(a^2-a+1) = a^3+1$.
Sexta : $(a-1)(a^2+a+1) = (a^3+a^2+a)-(a^2+a+1) = a^3-1$.
Terceira e quarta: prova análoga à do quinta e sexto caso. Fica como exercício fácil.

**Exemplo**
Algumas pessoas gostam de escrever a primeira identidade de maneira a fazer uma analogia com a identidade notável $(a+b)^2$. Ou seja, preferem escrever: $(a+b)^3 = a^3 + 3ab(a+b) + b^3$.
Semelhantemente, escrevem: $(a-b)^3 = a^3 - 3ab(a-b) + b^3$. Confira que tudo dá no mesmo.

**Exemplo**
*Sabendo que $x+y=8$ e que $xy=13$, podemos determinar o valor de $x^3+y^3$?*
Partindo de $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$, obtemos:

$$x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y) = 8^3 - 3\times 13\times 8 = 512 - 312 = 200.$$

**Exemplo** (muito importante)
*Achar todos os números primos da forma $n^3-1$, com n inteiro positivo.*
Como $n^3-1=(n-1)(n^2+n+1)$ e $n^2+n+1 \geqslant 2$, para $n^3-1$ ser primo somos obrigados a ter $(n-1)=1$, ou seja: $n=2$. Logo, ou $2^3-1$ é um primo da forma $n^3-1$, ou não há nenhum outro deste tipo. Como $2^3-1=7$ é primo, segue que há exatamente um primo de tal forma: o número 7.

### Identidades importantes envolvendo frações

- $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{b+a}{ab}$
- $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab}$
- $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} = \frac{2n+1}{n(n+1)}$
- $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$
- $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n}$, note que também vale $\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n-1}{n(n+1)}$, mas é pouco útil.

**Demonstração**
Primeira: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{b}{ab} + \frac{a}{ab} = \frac{b+a}{ab}$. Segunda: $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b}{ab} - \frac{a}{ab} = \frac{b-a}{ab}$.
Terceira, quarta e quinta são casos particulares dessas.

**Exemplo**
*Mostrar que $\frac{4x-1}{x-2} = 4 + \frac{7}{x-2}$, para todos os números reais $x \neq 2$.*
Iniciar pelo membro da esquerda é mais difícil do que pela direita. Entendido isso, temos:

$$4 + \frac{7}{x-2} = \frac{4(x-2)}{x-2} + \frac{7}{x-2} = \frac{4(x-2)+7}{x-2} = \frac{4x-8+7}{x-2} = \frac{4x-1}{x-2}.$$

Entre outras coisas, este exemplo chama a atenção para o fato que as identidades acima também valem para números não inteiros; elas valem até mesmo para números irracionais.

## Identidades de Diophantos e Brahmagupta (alunos de nível 2 ou 3)

Temos aqui duas identidades que costumam ser usadas em problemas mais difíceis, apropriados para alunos mais adiantados. A primeira pode ser encontrada nos livros associada aos nomes de Diophantos (c. 250 dC, o primeiro que mostrou conhecê-la e aplicá-la), Fibonacci (c. 1200 dC, a demonstração mais antiga conhecida), Lagrange (c. 1800, deu uma versão mais geral), ou Brahmagupta (c. 650 dC que, em verdade, descobriu a segunda identidade e a aplicou em vários problemas difíceis). Bem, vejamos o que elas afirmam.

- $(a^2+b^2)\cdot(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$ (identidade de Diophantos)
- $(a^2+nb^2)\cdot(c^2+nd^2)=(ac+nbd)^2+n(ad-bc)^2$ (identidade de Brahmagupta)

**Demonstração**

Diophantos: $(ac+bd)^2+(ad-bc)^2=(a^2c^2+2abcd+b^2d^2)+(a^2d^2-2abcd+b^2c^2)=a^2(c^2+d^2)+b^2(c^2+d^2)=(a^2+b^2)(c^2+d^2)$.

Brahmagupta: é análoga, fica como exercício.

**Como memorizá-las?**

Todo produto tipo $(a^2+b^2)(c^2+d^2)$ pode ser escrito como $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(x^2+y^2)$, desde que tomemos $x=ac+bd$ e $y=ad-bc$.

**A essência da importância da identidade de Diophantos**

Pense na lista de todos os quadrados de números inteiros e some-os, dois a dois. Desta maneira, obtemos o conjunto infinito que inicia como $\{0,1,2,4,8,9,10,13,16,17,18,20,\ldots\}$. Confira! Diophantos observou que o *produto* de cada par de números deste conjunto também está no conjunto. Confira alguns casos! Em Matemática, dizemos que esse conjunto é *fechado* na operação de multiplicação.

> Resumindo, da identidade de Diophantos segue que:
> sempre que dois números inteiros, $m$ e $n$, forem, cada um, a soma de dois quadrados, então seu produto $mn$ também será a soma de dois quadrados.

**Exemplos**

$26=2\cdot13=(1^2+1^2)\cdot(2^2+3^2)=(1\cdot3+1\cdot2)^2+(1\cdot2-1\cdot3)^2=5^2+(-1)^2=5^2+1^2=26.$

$16=2\cdot8=(1^2+1^2)\cdot(2^2+2^2)=$ etc.

$116=4\cdot29=2\cdot58=(1^2+1^2)\cdot(7^2+3^2)=$ etc.

**Exercício**

*Mostre que a identidade de Diophantos também pode ser escrita como:*

$$(a^2+b^2)\cdot(c^2+d^2)=(ad+bc)^2+(ac-bd)^2$$

**Problema**

*Usando Diophantos, mostre que 144, 145 e 146 têm a rara propriedade de serem três números inteiros consecutivos que podem ser escritos como soma de dois quadrados.*

Dicas. Como V. precisa escrever cada número como um produto (de somas de quadrados), inicie fatorando em primos. Depois V. terá de reescrever a fatoração em primos como produto de dois fatores adequados. Exs: $144=3^2\cdot4^2=16\cdot9=8\cdot18=(2^2+2^2)\cdot(3^2+3^2)=$ etc., $145=5\cdot29=$ etc.

Entre as principais aplicações que, lá por c. 650 dC, o matemático indiano Brahmagupta fêz da identidade que descobriu, citamos:

- calculou aproximações sucessivamente melhores de raízes quadradas, como foi o caso da $\sqrt{3}$;
- para cada inteiro $N$, achou infinitos números inteiros $x$ e $y$ raízes da que hoje denominamos equação de Pell: $x^2-Ny^2=1$, a qual ocorre frequentemente em problemas astronômicos e matemáticos. Por exemplo, se $N=3$: $(x,y)=(2,1),(7,4),(26,15)$, etc.

Veremos detalhes disso em material suplementando esta apostila.

## 3).– Exemplos de aplicações de identidades

### ✔ Calcular o quadrado de um número

As vezes, conseguimos escrever o número dado como a soma, ou a diferença, de dois outros cujo quadrado é mais fácil de calcular.

**Exemplo**

*Seja calcular* $5003^2$ .

Em vez do cálculo direto do quadrado, o que será demorado e pode gerar erros, exploremos que $5000 = 5000+3$, e que ambas estas parcelas têm um quadrado muito fácil de calcular. Com efeito,

$$5003^2 = (5000+3)^2 = 5000^2 + 6\times 5000 + 3^2 = 25\,000\,000 + 30\,000 + 9 = 25\,030\,009\,.$$

**Exercício**

*Calcule de cabeça o valor de* $31^2$ *de dois modos: usando* $(30+1)^2$ *e usando* $31^2 - 30^2$ .

### ✔ Calcular o valor da diferença de dois quadrados

Usando $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ , transformamos o trabalho de calcular dois quadrados e sua diferença no trabalho de calcular uma soma, uma diferença e um produto, o que certamente é mais rápido.

**Exemplo**

*Seja calcular* $87^2 - 13^2$ .

Usando a identidade acima, temos: $87^2 - 13^2 = (87+13)\cdot(87-13) = 100\cdot 74 = 7\,400$.

Essa técnica pode ser usada em expressões numéricas aparentemente dissociadas de diferenças de quadrados. Para termos sucesso, evidentemente, teremos de fazer algumas transformações algébricas até produzirmos a diferença de quadrados. O problema a seguir ilustra esta observação.

**Problema**

*Calcular* $6^4 + 54^2 + 9^4$ . *Inicie observando que temos uma expressão da forma* $a^2+ab+b^2$ *, onde* $a = 6^2$ *e* $b = 9^2$ *, a seguir use que* $a^2+ab+b^2 = a^2+2ab+b^2-ab$ *, e continue daí.*

Resp.: $117^2 - 54^2 =$ etc.

### ✔ Calcular o valor de uma expressão a partir do valor de outra

Para se conseguir ver como a expressão de valor conhecido pode ser encaixada como uma componente da expressão a calcular deve-se procurar, entre as identidades já listadas, uma que envolva essas duas expressões. Entendamos isso por meio de um exemplo.

**Exemplo**

*Sabendo que* $x + \frac{1}{x} = a$ *, expressar em termos de a o valor de* $x^2 + \frac{1}{x^2}\cdot$

Solução. Observe que $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$ , de modo que $x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 - 2 = a^2 - 2$ .

**Problema**

*Sabendo que* $x + \frac{1}{x} = a$ *, expressar em termos de a o valor de* $x^8 + \frac{1}{x^8}\cdot$

### ✔ Simplificar um denominador envolvendo raízes quadradas

Os casos mais comuns são os das frações que têm denominador da forma $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ ou $\sqrt{a}+\sqrt{b}$. Em tais casos, usamos a identidade notável $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$ , com $x = \sqrt{a}$ e $y = \sqrt{b}$ .

**Exemplo**

$$\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{5-2} = \frac{1}{3}(\sqrt{5}+\sqrt{2}), \quad \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{5-2} = \frac{1}{3}(\sqrt{5}-\sqrt{2})\,.$$

**Problema**

*Achar o menor número inteiro n verificando:* $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} \geqslant 100$ .

Resp.: $n = 10\,200$.

### ✔ Fatorar uma expressão algébrica

Pela importância desta aplicação, dedicaremos a próxima lição inteiramente a ela.

## 4).– Resumindo e reforçando

➤ **Identidades algébricas tipo** $(a \pm b)^2$
Fáceis de usar se já temos expressão tipo $a^2 \pm 2ab + b^2$. Caso isso não ocorra, procure somar e subtrair parcela adequada. Por exemplo:
$a^2 + ab + b^2 = (a^2 + 2ab + b^2) - ab = (a+b)^2 - ab$.

➤ **Identidades algébricas tipo** $a^2 \pm b^2$
Não podemos fatorar $a^2 + b^2$ (nos números reais).
Mas, é imensamente útil usar $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.

➤ **Identidades algébricas de terceiro grau**
Pequena diferença com o segundo grau: além de termos identidades para $(a \pm b)^3$, agora temos fatoração tanto para $a^3 - b^3$ como para $a^3 + b^3$.
Usando as identidades de $(a \pm b)^3$, podemos deduzir facilmente as para $(a \pm b)^3$. Basta usar $(a \pm b)^3 = (a \pm b) \cdot (a \pm b)^2$.
Para as $a^3 \pm b^3$, que são mais difíceis de guardar, lembrar que $a^3 + b^3$ tem fator $(a+b)$ e $a^3 - b^3$ tem fator $(a-b)$, enquanto que o segundo fator é da forma $a^2 \pm ab + b^2$.

✦ PROBLEMAS DE REVISÃO ✦

**Problema**
*Dados $a, b, c$ três números reais não nulos cuja soma de seus recíprocos é nula, ou seja: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$, pede-se mostrar que $ab + bc + ca = 0$. Em tal caso, concluir que $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2$.*

**Problema**
*Descobrir uma maneira de calcular rapidamente o valor da soma:* $1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \frac{16}{81}$.

**Problema**
*Na resolução de um certo problema, obteve-se a fórmula $y = \frac{x^2-4}{x^2+4}$. Pede-se:*

*a). mostrando que a fórmula pode ser reescrita como $y = 1 - \frac{8}{x^2+4}$, concluir que $y < 1$;*
*b). mostrando que a fórmula pode ser reescrita como $y = \frac{2x^2}{x^2+4} - 1$, concluir que $y \geqslant -1$;*
*c). justificar por que $y < 1$, e não $y \leqslant 1$; por que $y \geqslant -1$, e não $y > -1$?*

**Problema**
*Mostrar que, para números $a, b, c$ por determinar, vale:* $\dfrac{(x-1)^3 - 8}{x-3} = ax^2 + bx + c$

**Problema**
*Ada observou que $5^2 - 4^2 = 5 + 4$, $10^2 - 9^2 = 10 + 9$, $120^2 - 119^2 = 120 + 119$. Beto lhe disse que essas igualdades, na verdade, valem para quaisquer dois inteiros consecutivos. Pede-se escrever igualdade algébrica expressando o que Beto afirmou e provar que ela vale sempre.*

**Problema**

*a). Calcule inteligentemente o valor das somas:* $123^2 - 122^2 - 121^2 + 120^2$, $45^2 - 44^2 - 43^2 + 42^2$, $97^2 - 96^2 - 95^2 + 94^2$;
*b). a partir dos resultados acima, deduza um padrão geral e prove sua veracidade.*

**Problema**
*Mostrar que* $\dfrac{20092008^2}{20092007^2 + 20092009^2 - 2} = \dfrac{1}{2}$

**Problema**
*Mostrar que* $\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{15} + \dfrac{1}{35} + \dfrac{1}{63} + \dfrac{1}{99} + \dfrac{1}{143} + \dfrac{1}{195} + \dfrac{1}{255} + \dfrac{1}{323} + \dfrac{1}{399} + \dfrac{1}{483} = \dfrac{11}{23}$.
Dica: use $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \cdots$.

**Problema** (alunos nível 2 ou 3)
*Calcular o valor do produto* $p = (2+1)(2^2+1)(2^{2^2}+1)(2^{2^3}+1)(2^{2^4}+1)(2^{2^5}+1)$.
Dica: repetidamente, use a identidade $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$. Para fazer aparecer fatores tipo $(a-b)$ pense em iniciar calculando $(2-1)p$.