# LIÇÃO 7
# Introdução à resolução das equações numéricas

## 1).– Tipos de equações

Na Matemática, nas Ciências e em olimpíadas, encontramos equações onde a incógnita pode ser número, função, matriz ou outros objetos matemáticos.
**Exemplo** (OBM-2009, Nível Universitário)
*Que funções* $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ *verificam (para cada* $n\in\mathbb{Z}$*):* $f(f(n))=f(n+1)$ *e* $f(2009\,n+2008)=2009\cdot f(n)$.
Nesta lição trataremos apenas das equações com uma única incógnita, a qual é uma variável numérica. Então, para simplificar este texto, quando estiver escrito "equação" o leitor deve entender que se trata de "equação numérica de uma incógnita".

## 2).– Métodos de resolução das equações numéricas

São divididos em três classes: métodos computacionais, métodos geométricos e métodos algébricos ou analíticos. Neste minicurso, trataremos apenas dos métodos algébricos. No Ensino Médio, quando o leitor estudar Geometria Analítica, ficará mais apropriado o estudo dos métodos geométricos. No Brasil, é tradicional se deixar os métodos computacionais para os estudos universitários.

## 3).– Etapas na resolução algébrica de equações numéricas

Tanto em problemas olímpicos como nos estudos matemáticos e nas aplicações científicas, temos quatro passos na resolução de problemas envolvendo equações.

1). *Equacionamento do problema* ou tradução do problema em notação algébrica. Já tratamos bastante desta etapa desde as primeiras lições deste minicurso.
2). *Transformação simplificadora* da equação obtida, objetivando chegar até uma equação mais fácil de resolver, ou uma cuja resolução se aprendeu na Escola.
3). *Resolução algébrica da equação.* É o que veremos nesta lição.
4). *Discussão* das soluções, tipicamente estudando seu comportamento à medida que varia algum parâmetro da equação. De grande importância nas aplicações, mas teremos pouco tempo para estudar essa etapa.

## 4).– Os dois grandes cuidados na resolução de equações

Fatalmente cometeremos erros, a menos que tenhamos os seguintes cuidados.

- *Nunca dividir por zero.*
  Em aula. será mostrado o porquê dessa proibição, bem como serão dados exemplos de absurdos que se acaba cometendo ao, descuidadamente, dividir por zero.
- Ao transformar a equação do problema em outra mais fácil de resolver, precisamos garantir a *equivalência lógica* delas, ou seja: precisamos garantir que não perdemos raízes e nem produzimos raízes inexistentes na equação original do problema.
  Na página seguinte, veremos que transformações são essas.

**Exemplo**
*Sendo* $x=1$ *podemos escrever sucessivamente:* $x^2=x$, *logo* $x^2-1=x-1$, *que por identidade já nossa conhecida pode ser escrito como* $(x+1)(x-1)=x-1$. *Cancelando o fator comum, temos* $x+1=1$, *logo* $1+1=1$, *ou* $2=1$.
Onde foi cometido erro? A simplificação do fator comum $(x-1)$ em $(x+1)(x-1)=x-1$ foi feita dividindo ambos os membros da igualdade por $(x-1)$, cujo valor é zero, pois $x=1$.

# A transformação de equações por equivalência

## 1). Equivalência no contexto de equações

**Definição e notação**
*Equações equivalentes* são equações que têm as mesmas raízes.
Notação: $A = B \iff A' = B'$ denota que as equações $A = B$ e $A' = B'$ são equivalentes, ou seja: que toda raiz de $A = B$ é raiz de $A' = B'$, e reciprocamente toda raiz de $A' = B'$ é raiz de $A = B$.
**Definição**
*Transformações algébricas equivalentes* são as transformações algébricas que nos permitem passar de uma equação dada para outra a ela equivalente, ou seja: que têm as mesmas raízes.
**A estratégia básica do método da resolução algébrica de equações**
Consiste em transformar a equação, $A = B$, original do problema em outra, $A' = B'$, *a ela equivalente* e que seja mais fácil de resolver, ou de um tipo que já sabemos resolver. A equivalência garantirá que no processo de simplificação não deixamos de calcular nenhuma raiz da equação original, $A = B$, e nem produzimos alguma raiz inexistente, ou seja: que é raiz de $A' = B'$, mas não de $A = B$.

## 2).– Existem dois tipos de transformações equivalentes

Em geral, para simplificarmos a equação $A = B$ original de um problema, faremos sucessivas transformações. Cada uma delas se encaixa em de dois grandes tipos:

- *transformação unilateral:* modifica apenas um dos membros da equação. Isso é o caso das reduções, decomposições e uso de identidades algébricas que estudamos nas últimas lições;
- *transformação bilateral:* modifica ambos os membros da equação (os dois "lados" da equação). Abaixo veremos quem são e porque são transformações equivalentes.

## 3).– Transformações equivalentes bilaterais básicas

Para facilitar o entendimento do que segue, voltaremos a usar letras maiúsculas, $A, B, C$, etc., para denotar expressões algébricas quaisquer (então, aí estão incluídas as possibilidades de estas letras denotarem também apenas números ou apenas variáveis).

*Tendo o cuidando* de considerar apenas valores da incógnita para os quais simultâneamente tenha sentido numérico o valor de cada uma das expressões $A, B, C$, valem as equivalências:

- **regra do transporte aditivo:** $A + C = B \iff A = B - C$
  **regra do transporte multiplicativo:** $AC = B \iff A = \frac{B}{C}$, desde que $C \neq 0$.
- **regra do cancelamento aditivo:** $A + C = B + C \iff A = B$
  **regra do cancelamento multiplicativo:** $AC = BC \iff A = B$, desde que $C \neq 0$.

Prova. Essa regras são imediatas consequências do teorema seguinte, pois toda expressão algébrica representa números reais.
**Teorema**
*Sendo $a, b, c$ números reais, valem as seguintes propriedades:*

- **transporte aditivo:** $a + c = b \iff a = b - c$
  **transporte multiplicativo:** $ac = b \iff a = \frac{b}{c}$, desde que $c \neq 0$.
- **cancelamento aditivo:** $a + c = b + c \iff a = b$
  **cancelamento multiplicativo:** $ac = bc \iff a = b$, desde que $c \neq 0$.

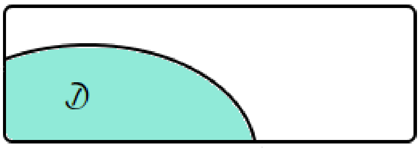
**Exemplo**
Usando a identidade expressando o quadrado da soma (tr. unilateral), temos $4x^2-4x+1 = 2x-1 \iff (2x-1)^2 = 2x-1$ (para todos os $x$ reais). Contudo, aplicando o cancelamento multiplicativo com $C = (2x-1)$, a exigência de termos $C \neq 0$ faz com que a equivalência $(2x-1)^2 = 2x-1 \iff (2x-1) = 1$ somente valha para os $x \neq 1/2$. Consequentemente, $4x^2-4x+1 = 2x-1 \iff 2x-1 = 1$ também vale apenas para os $x \neq 1/2$. Isso nos deixa no seguinte dilema: temos de buscar as raízes da equação original entre todos os $x$ reais, mas ela só é equivalente à equação simplificada $2x-1 = 1$ para $x \neq 1/2$. No que segue, passaremos a tratar desse dilema.

# RESUMO da resolução algébrica de equações em geral

## 1).– Conjuntos associados à uma equação numérica

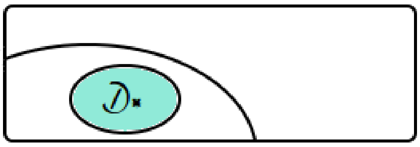
### O universo numérico

associado a um problema olímpico depende do nível:
– nos Níveis 1 e 2: o universo é o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$
– no Nível 3: o universo é o conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$.




### O domínio da equação

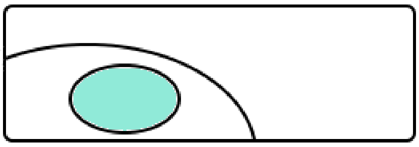
será denotado por $\mathscr{D}$ e, exceto quando o contexto matemático ou físico do problema fizer outras restrições, consiste no conjunto dos números que a incógnita pode assumir de modo a ficar atribuído sentido numérico aos dois membros da equação.




### O domínio de transformação equivalente da equação

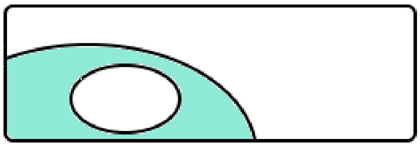
Ao resolvermos uma equação, sua transformação para outra mais fácil nem sempre é possível fazer inteiramente no domínio da equação dada e, bem entendido, de modo a garantir a equivalência das duas equações. Em geral, conseguiremos fazer a transformação *apenas em parte* do domínio da equação original. Essa parte é o **domínio de transformação** e é denotada por $\mathscr{D}_*$.

## 2).– A resolução de toda equação numérica tem duas etapas



### Primeira etapa

calculo as raízes que a equação **simplificada** tem em $\mathscr{D}_*$, e *apenas* em $\mathscr{D}_*$.



### Segunda etapa

verifico diretamente na equação **original** do problema se ela tem alguma raiz em $\mathscr{D}\backslash\mathscr{D}_*$.

## 3).– Conclusão, o encaminhamento da resolução

o **conjunto** (das raízes da equação original do problema) é o resultado da união do **conjunto** (das raízes em $\mathscr{D}_*$ da equação simplificada) com o **conjunto** (das eventuais raízes que a equação original tem em $\mathscr{D}\backslash\mathscr{D}_*$). Podemos resumir essa conclusão como:

**Raízes**(em $\mathscr{D}$ da eq. original) = **Raízes**(em $\mathscr{D}_*$ da eq. simplificada) $\cup$ **Raízes**(em $\mathscr{D}\backslash\mathscr{D}_*$ da eq. original).

No caso particular, e bastante comum, em que $\mathscr{D}=\mathscr{D}_*$, o trabalho fica mais fácil:

**Raízes**(em $\mathscr{D}$ da eq. original) = **Raízes**(em $\mathscr{D}$ da eq. simplificada).

**Exemplos modelo**

- para o caminho geral: $(2x-1)^2=2x-1$, a qual tem $\mathscr{D}=\mathbb{R}$, mas equivale a $2x-1=1$ somente em $\mathscr{D}_*=\mathbb{R}\setminus\{\frac{1}{2}\}$.
- para o caminho simples: $3x+\frac{1}{x-2}=6+\frac{1}{x-2}$, a qual tem $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{2\}$ e equivale a $3x=6$ em $\mathscr{D}=\mathscr{D}_*$. Contudo, embora o domínio da simplificada seja $\mathbb{R}$ temos de resolvê-la somente para $x\neq 2$.

## 1).– Equação fatorada

*é toda equação que se apresenta como um produto nulo de expressões algébricas, como* $A \cdot B = 0$*, ou* $A \cdot B \cdot C = 0$*, ou com qualquer outro número de fatores.*
A resolução das equações fatoradas é baseada no seguinte teorema sobre números reais.

## 2).– Teorema separador

**Teorema**
*Sendo a e b números reais, então* $ab = 0 \iff$ *ao menos um dentre a e b é nulo.*
*Dizendo isso de um modo mais fácil de entender: sempre que valer vale* $ab = 0$*, teremos que:*
*– se* $a \neq 0$*, então* $b = 0$*, e*
*– se* $a = 0$*, então* $b$ *pode ser qualquer número real, em particular pode ser zero.*
*Reciprocamente, se qualquer um dentre* $a$ *e* $b$ *for zero, teremos* $ab = 0$.

Prova. É imediato que a nulidade de um fator implica na nulidade do produto. Reciprocamente, se o produto for nulo, então ao menos um fator tem de ser nulo. Com efeito, a regra do cancelamento mostra que é impossível termos dois fatores não nulos e seu produto se anular.

## 2).– Regra da separação

É imediata consequência do Teorema Separador:

Sendo $A, B, C$, etc. expressões algébricas em uma mesmo domínio $\mathscr{D}$, então em $\mathscr{D}$:
- *o conjunto das raízes de* $A \cdot B = 0$ *é igual ao conjunto das raízes de* $A = 0$ *mais o das de* $B = 0$.
- *o conjunto das raízes de* $A \cdot B \cdot C = 0$ *é igual ao das de* $A = 0$*, mais o das de* $B = 0$ *e mais o das de* $C = 0$.

Resultados análogos para quatro ou mais fatores.

**Exemplo**
Vejamos uma outra maneira de resolver a equação $4x^2 - 4x + 1 = 2x - 1$.
*Determinação do domínio.* Nenhuma restrição contextual e nenhum ponto proibido, logo o domínio é o conjunto dos números reais: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
*Simplificação da equação:*
$4x^2 - 4x + 1 = 2x - 1 \iff 4x^2 - 6x + 2 = 0 \iff 2x^2 - 3x + 1 = 0 \iff (2x-1)(x-1) = 0$, tudo isso valendo para qualquer número real $x$, ou seja: estamos num caso em que $\mathscr{D}_* = \mathscr{D} = \mathbb{R}$.
*Resolução.* Aplicando a Regra Separadora, dividimos ou separamos a equação dada em duas, pois temos dois fatores. O primeiro fator dá a equação $2x - 1 = 0$ que tem uma única raiz, $x = 1/2$, e o segundo fator dá a equação $x - 1 = 0$, cujo conjunto de raízes se limita apenas à $x = 1$. Consequentemente, o conjunto das raízes de $4x^2 - 4x + 1 = 2x - 1$ é $\{1/2, 1\}$. Em linguagem mais simples, as raízes da equação $4x^2 - 4x + 1 = 2x - 1$ são $x = 1/2$ e $x = 1$.
Também podemos resumir essa conclusão na linguagem da Teoria dos Conjuntos:

$$\begin{aligned}\textbf{Raízes}(4x^2 - 4x + 1 = 2x - 1) &= \textbf{Raízes}\big((2x-1)(x-1) = 0\big)\\ &= \textbf{Raízes}(2x - 1 = 0) \cup \textbf{Raízes}(x - 1 = 0)\\ &= \{1/2\} \cup \{1\} = \{1/2, 1\}.\end{aligned}$$

**Problema** (para resolver em aula)
*Existem várias maneiras de resolvermos uma equação quadrática genérica,* $ax^2 + bx + c = 0$*. O grande al Khwarizmi a resolveu transformando-a em uma equação fatorada, o que ele conseguiu fazer usando a identidade que expressa o quadradado de uma soma. Tente implementar sua ideia.*
*Dica: não há perda de generalidade em se considerar apenas o caso* $x^2 + bx + c = 0$*, o que vai simplificar bastante as transformações necessárias para se obter a fatoração.*

## Problemas de revisão

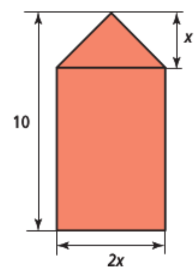
A maioria dos problemas seguintes envolvem equações que, em um domínio de transformação apropriado, poderão ser reduzidas ou ao formato $ax+b=0$, ou a uma equação fatorada cujos fatores todos têm o formato linear $ax+b$.
Também atente para o fato de que cada uma dessas equações poderá ser encaixada em qualquer uma das três possibilidades: *equação com* (número finito de) *raízes, equação impossível* (= sem raízes) ou *equação indeterminada* (= com infinitas raízes).

**Problema**
*A equação* $(x-1)(2x+3)=(x-6)(x-1)$, *tem mais de uma raiz. Quem são elas?*

**Problema**
*Para a equação* $(x-1)(x-2)(x-3)^2=(x-3)(x-2)(x-1)$, *determine seu domínio e o domínio* $\mathscr{D}_*$ *que nos permite cancelar o maior fator comum existente na equação. Feito isso, resolva-a.*

**Problema**
*Para resolver* $25x^2-10x+1=5x-1$, *a Wikipedia transformou a equação em* $(5x-1)^2=5x-1$, *e daí para* $5x-1=1$, *de onde concluiu que a solução da equação original é* $x=1/5$. *Pede-se:*
*mostrar o erro do raciocínio e então resolver corretamente a equação.*

**Problema**
*Um arquiteto precisa projetar uma casa cuja seção transversal está esquematizada ao lado: o corpo é retangular e a seção do teto tem o formato de um triângulo isósceles de altura* $x$.
*Será possível o arquiteto projetar uma tal casa na qual o corpo e a seção do teto tenham a mesma área?*




**Problema**
*Mostre que cada equação a seguir se encaixa em uma das possibilidades: com raiz única, sem raízes ou indeterminada.*
$2(1+3x)-3(1+2x)=x+4(x-1)-(4x+3)$, $\quad 2(x+\frac{1}{2})=5x+1-3x$, $\quad \frac{1}{3}(2x-1)=\frac{1}{6}(x-5)+\frac{1}{2}(x+3)$.

**Problema**
*Discutir o que ocorre com as raízes de* $ax=b$, *à medida que* $a$ *e* $b$ *assumirem quaisquer valores, inclusive zero.*

**Problema**
*Transformando para a forma fatorada, calcule as raízes de* $(5x+2)^2=(x+1)^2$.
Dica: $a^2-b^2=$ etc.

**Problema**
*Determinar cinco números inteiros consecutivos cuja soma vale 405.*
Dica: para facilitar o equacionamento do problema, denote por $x$ o número do meio.

**Problema**
*A relação entre as variáveis* $x$ *e* $y$ *é dada pela fórmula* $y=x-3+3(x-3)^2+x^2-9$. *Pede-se:*
*a). mostrar que podemos reescrever a fórmula como* $y=4x^2-17x+15$.
*b). determinar* $x$ *quando* $y=15$.
*c). transformando a fórmula para formato fatorado, determine os* $x$ *que dão* $y=0$.