Números irracionais

Problema 1

Considere o número 0,112358314..., onde cada algarismo, a partir do terceiro, é obtido somando os dois algarismos anteriores a ele, ficando-se apenas com o algarismo das unidades e desprezando o das dezenas. Esse número é racional ou irracional? Justifique.

Problema 2

Denominaremos de casa de Einstein de um número irracional à primeira casa depois da vírgula de sua expansão decimal que é seguida por um bloco de três dígitos iguais. Assim sendo, pede-se:
a). Mostrar que existem números irracionais sem casa de Einstein.
b). Mostrar que, para cada inteiro $n \geqslant 1$, existe um número irracional cuja casa de Einstein é a n-ésima casa decimal.

Problema 3

Responda, justificando:

a). $\sqrt{x}$ irracional implica x irracional?
b). $\sqrt{x}$ racional implica x racional?
c). x irracional implica $\sqrt{x}$ irracional?
d). x racional implica $\sqrt{x}$ racional?

Problema 4

Sejam u, v, w três números reais, tais que $u - v$ e $u + v + w$ são números racionais. Pergunta-se:
a). Se um dentre u e v for racional, então w é racional? Justifique.
b). Se v for racional, então u+v é racional? Justifique.
c). Se w for racional, então u e v são racionais? Justifique.

Problema 5

Cada afirmação abaixo refere-se a retângulos não quadrados. *Para cada uma, decida qual a melhor resposta dentre as seguintes alternativas: "sempre vale", "pode valer, mas nem sempre", "nunca vale".*
a). se o perímetro é número racional, então a área também é racional;
b). se o perímetro é número irracional, então a área também é irracional.

Problema 6

Cada afirmação abaixo refere-se à circunferência e à área de um mesmo círculo. Para cada uma, decida qual a melhor resposta dentre as seguintes alternativas: "sempre vale", "pode valer, mas nem sempre vale", "nunca vale". Justifique todas as afirmações que fizer, mas considere sabido que π e $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ são números irracionais.
a). se a circunferência é número racional, então a área também é racional;
b). se a circunferência é número irracional, então a área também é irracional.

Problema 7

Sempre que escolhermos três números irracionais, obrigatoriamente ao menos dois deles têm como soma um irracional.

Problema 8

a). *Provar que para cada número racional pode-se achar dois outros racionais à mesma distância dele.*
b). *Provar que nenhum número irracional é equidistante de dois racionais.*
c). *Um número real é dito ser torto se ele não estiver equidistante de nenhum par de números racionais. Provar que são iguais o conjunto dos tortos e o dos irracionais.*

Problema 9

a). *Determine número inteiro* n *tal que* $\sqrt{5}+\sqrt{45}=\sqrt{n}$.
b). *Usando o item anterior, decida se* $\sqrt{5}+\sqrt{45}$ *é um número racional ou um número irracional, citando propriedade que usou para decidir.*

Problema 10

Decidir se o número $\sqrt{12+6\sqrt{3}}+\sqrt{12-6\sqrt{3}}$ *é racional ou irracional. Justifique.*

Problema 11

A Figura 1 é composta de três quadrados cujos lados têm como medida números inteiros: m *para o maior e* n *para os menores. Eles são usados para construir a Figura 2. Essas figuras constituem uma demonstração alternativa e sem palavras de que* $\sqrt{2}$ *é irracional, como veremos a seguir.*

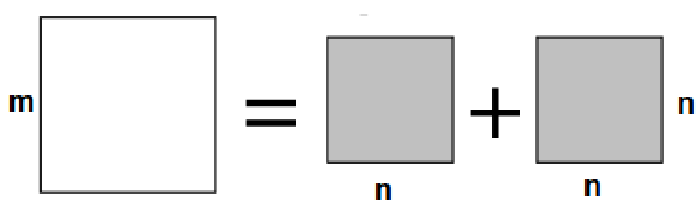

FIGURA 1

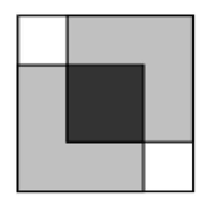

FIGURA 2

a). *Supondo a Figura 1 expresse uma igualdade de áreas, mostre que ela determina uma representação em fração ordinária para* $\sqrt{2}$, *e os quadrados menores da Figura 2 determinam outra.*
b). *Mostre que as frações do item anterior podem ser vistas como tendo uma incompatibilidade que implica na demonstração por absurdo da irracionalidade de* $\sqrt{2}$.