Identidades algébricas em Olímpiadas

Técnicas algébricas já eram conhecidas pelos antigos indianos e gregos, há mais de 2 000 anos. Depois, foram muito desenvolvidas pelos matemáticos muçulmanos. Mas tudo isso era uma álgebra que dependia de interpretações geométricas.

Coube a R. Descartes, em sua *La Géométrie* de c. 1640, criar uma álgebra baseada apenas em números, dando interpretação estritamente numérica para quaisquer potências inteiras de variáveis e mostrar como operar com elas. Essa ideia mais o aperfeiçoamento da notação literal rapidamente levaram a Álgebra a um estado semelhante ao que se aprende na Escola.

As identidades algébricas mais comuns

Identidades notáveis de segundo grau

São ditas notáveis por serem as identidades mais usadas. É muito importante memorizá-las e estar sempre atento para a possibilidade de usá-las, mesmo que as aparências escondam isso.

Decomposição, ou redução:
- $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$
- $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$

Fatoração:
- a^2+b^2 não se pode fatorar no contexto dos números reais
- $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

Identidades notáveis de terceiro grau

Decomposição, ou redução:
- $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
- $(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

Fatoração:
- $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$
- $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$
- $a^3+1=(a+1)(a^2-a+1)$
- $a^3-1=(a-1)(a^2+a+1)$

Generalização, identidades algébricas notáveis de grau qualquer

Aqui, n indicará um inteiro $\geqslant 1$, e $\binom{n}{k}=\frac{n}{k!\,(n-k)!}$ denota um coeficiente binomial.

Decomposição, ou redução:
- $(a+b)^n = a^n+\binom{n}{n-1}a^{n-1}\,b+\binom{n}{n-2}a^{n-2}\,b^2+\binom{n}{n-3}a^{n-3}\,b^3+\ldots+\binom{n}{n-1}a\,b^{n-1}+b^n$
- $(a-b)^n =$ reescreva a identidade acima, alternando os sinais das parcelas

Fatoração:
- $a^n+b^n=(a+b)\left(a^{n-1}-a^{n-2}\,b+a^{n-3}\,b^2-\ldots-a\,b^{n-2}+b^{n-1}\right)$ (Cuidado! Esta só vale para n ímpar)
- $a^n-b^n=(a-b)\left(a^{n-1}+a^{n-2}\,b+a^{n-3}\,b^2+\ldots+a\,b^{n-2}+b^{n-1}\right)$ (Esta vale para qualquer n)

Identidades importantes envolvendo frações

- $\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}=\frac{2n+1}{n(n+1)}$
- $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}$
- $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}$, note que também vale $\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n-1}{n(n+1)}$, mas é pouco útil.

Exemplos de uso dessas identidades

✔ Calcular o quadrado de um número

As vezes, conseguimos escrever o número dado como a soma, ou a diferença, de dois outros cujo quadrado é mais fácil de calcular.

Exemplo

a). *Calcule de cabeça o valor de* 5003^2 .

b). *Calcule de cabeça o valor de* 31^2 *de dois modos: usando* $(30+1)^2$ *e usando* $31^2 - 30^2$.

✔ Calcular o valor da diferença de dois quadrados

Usando $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$, transformamos o trabalho de calcular dois quadrados e sua diferença no trabalho de calcular uma soma, uma diferença e um produto, o que certamente é mais rápido.

Exemplo

a). *Calcular inteligentemente* $87^2 - 13^2$.

b). *Calcular* $6^4 + 54^2 + 9^4$.

✔ Calcular o valor de uma expressão a partir do valor de outra

Para se conseguir ver como a expressão de valor conhecido pode ser encaixada como uma componente da expressão a calcular deve-se procurar, entre as identidades já listadas, uma que envolva essas duas expressões.

Exemplo

a). *Sabendo que* $x + \frac{1}{x} = a$ *, expressar o valor de* $x^2 + \frac{1}{x^2}$ *em termos de* a.

b). *Sabendo que* $x + \frac{1}{x} = a$ *, expressar o valor de* $x^8 + \frac{1}{x^8}$ *em termos de* a.

✔ Simplificar um denominador envolvendo raízes quadradas

Os casos mais comuns são os das frações que têm denominador da forma $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ ou $\sqrt{a} + \sqrt{b}$. Em tais casos, usamos a identidade notável $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$, com $x = \sqrt{a}$ e $y = \sqrt{b}$.

Exemplo

Achar o menor número inteiro n *verificando:* $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} \geqslant 100$.

Exercícios preliminares

Exercício

a). *Reduzir ao máximo a expressão* $(x+1)^2 - (x+2)(x^2+2x+1)$

b). *Sabendo que* $x + y = 8$ *e que* $xy = 13$*, como podemos determinar o valor de* $x^3 + y^3$*?*

c). *Mostrar que* $\frac{4x-1}{x-2} = 4 + \frac{7}{x-2}$ *, para todos os números reais* $x \neq 2$.

Revisão e problemas olímpicos

Problema 1

Decidir se o número $4^7 + 6^8 + 3^{16}$ *é primo, ou composto.*

Problema 2

Mostrar que $\dfrac{20092008^2}{20092007^2 + 20092009^2 - 2} = \dfrac{1}{2}$

Problema 3

Achar todas as raízes inteiras da equação em duas incógnitas: $1 + 2^x = y^2$.

Problema 4

Dados a, b, c *três números reais não nulos cuja soma de seus recíprocos é nula, ou seja:* $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$ *, pede-se mostrar que* $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

Problema 5

Na resolução de um certo problema, obteve-se a fórmula $y = \frac{x^2-4}{x^2+4}$ *. Pede-se provar que, qualquer que seja o valor de* $x \in \mathbb{R}$*, o correspondente* y *verifica* $-1 \leqslant y < 1$.

Problema 6

Mostrar que, para números a, b, c *que deve-se determinar, vale:* $\dfrac{(x-1)^3 - 8}{x-3} = ax^2 + bx + c$

Problema 7
Ada observou que $5^2 - 4^2 = 5+4$, $10^2 - 9^2 = 10+9$, $120^2 - 119^2 = 120+119$. *Beto lhe disse que essas igualdades, na verdade, valem para quaisquer dois inteiros consecutivos. Pede-se escrever igualdade algébrica expressando o que Beto afirmou e provar que ela vale sempre.*

Problema 8

a). *Calcule inteligentemente o valor das somas:* $123^2 - 122^2 - 121^2 + 120^2$, $45^2 - 44^2 - 43^2 + 42^2$, $97^2 - 96^2 - 95^2 + 94^2$ *;*

b). *a partir dos resultados acima, deduza um padrão geral e prove sua veracidade.*

Problema 9
Mostrar que $\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{15} + \dfrac{1}{35} + \dfrac{1}{63} + \dfrac{1}{99} + \dfrac{1}{143} + \dfrac{1}{195} + \dfrac{1}{255} + \dfrac{1}{323} + \dfrac{1}{399} + \dfrac{1}{483} = \dfrac{11}{13}$.

Problema 10 (muito importante)
Achar todos os números primos da forma $n^3 - 1$, *onde* n *é inteiro positivo.*

Problema 11
Determinar todas as raízes reais positivas da equação: $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = 49$.

Problema 12
Sendo dado que $a + b = 12$ *e que* $ab = 35$, *mostrar que* $a^4 + b^4 = 3026$.

Problema 13
Sendo dado que $xy = 6$ *e que* $x - y = -2$, *determinar o valor de* $\dfrac{x^3 + y^3}{x^2 - y^2} - \dfrac{x^2 + y^2}{x - y}$.

Problema 14
Sendo dado que $a^4 + a^2b^2 + b^4 = 900$ *e que* $a^2 + ab + b^2 = 45$, *determinar o valor do produto* ab.

Problema 15
Calcular o valor do produto $p = (2+1)(2^2+1)(2^{2^2}+1)(2^{2^3}+1)(2^{2^4}+1)(2^{2^5}+1)$.
Dica: repetidamente, use a identidade $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$. Para fazer aparecer fatores tipo $(a-b)$ pense em iniciar calculando $(2-1)p$.