Questões nível 1

Questão 1 –

Colocar em ordem de valor crescente os seguintes cinco números:

$$\frac{123456789}{33639452},\quad 10^{-2}+10^{-1}+10^{0}+10^{1}+10^{2},\quad \sqrt[3]{100\,000},\quad \pi^5,\quad 10^2.$$

Resp.

Observe que $\frac{123456789}{33639452} = 3,\dots$, que $\sqrt[3]{1000} < \sqrt[3]{100\,000} < \sqrt[3]{1\,000\,000}$, ou seja que $10 < \sqrt[3]{100\,000} < 100$, e que $\pi^5 > 3^5 = 243$. Conclusão:

$$\frac{123456789}{33639452} < \sqrt[3]{100\,000} < 10^2 < 10^{-2}+10^{-1}+10^{0}+10^{1}+10^{2} < \pi^5.$$

Questão 2 –

Um halterofilista de 75 kg está com 10% de gordura no corpo. Ele quer competir em categoria de peso inferior. Até que peso ele pode descer, se as regras exigem o atleta ter no mínimo 5% de gordura?

Resp.

Atualmente: 75 = 67,5 + 7,5. Indicando por g o peso de gordura mínimo para competir, devemos ter:

$$\frac{g}{67,5+g} = 0,05 \quad \therefore \quad g = 67,5\times 0,05 + 0,05g \quad \therefore \quad g = \frac{67,5\times 0,05}{0,95} = 3,55.$$

Logo, poderá baixar até o peso 67,5 + 3,55 = 71,05 kg.

Questão 3 –

Uma mercadoria, que custava 300 R\$ em outubro, foi posta a venda em novembro com uma redução de preço de a%. Em dezembro sofreu uma nova redução percentual, agora de $\frac{a}{2}$%, vindo a custar 150 R\$. Pede-se calcular o valor de a.

Resp.

$$\left(1-\tfrac{a}{100}\right)\times\left(1-\tfrac{a/2}{100}\right)\times 300 = 150 \quad \therefore \quad \frac{(100-a)(200-a)}{100\times 200}\times 300 = 150 \quad \therefore \quad (100-a)(200-a) = 10\,000,$$

de modo que $a^2 - 300a + 20\,000 = 10\,000$, ou seja: $a^2 - 300a + 10\,000 = 0$. Resolvendo essa equação por Bhaskara, temos

$$a = \frac{300 \pm \sqrt{50\,000}}{2} = \frac{300 \pm 100\sqrt{5}}{2} \cong 150 \pm 111,8\,,$$

ou seja $a \cong 38,2\%$. (Além de $a \cong 261,8\%$, que é inaceitável para o contexto do problema. Por quê?).

Questão 4 –

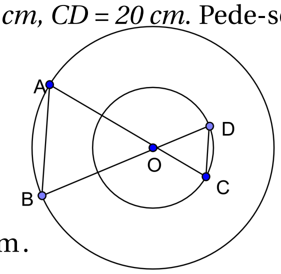
Foi construído um modelo em escala reduzida de 1:50 de um navio. Em laboratório, verificou-se que a área molhada do modelo mede 35 cm^2. Pede-se:

- *a). a área molhada do navio em metros quadrados*
- *b). relacionar a "razão R/r das resistências oferecidas pela água ao movimento do navio e modelo" com a "razão V/v das respectivas velocidades de movimento". Para isso, usar que a Física ensina que a resistência oferecida pela água é diretamente proporcional a área da secção transversal do objeto em movimento e diretamente proporcional ao quadrado de sua velocidade.*

Resp.
a). Indicaremos por maiúsculas as variáveis do navio e por minúsculas as do modelo. Foi dado que $L/\ell = 50/1$, e como $A \propto L^2$ e $a \propto \ell^2$, da semelhança entre as figuras navio e modelo segue que $A/a = L^2/\ell^2 = \left(L/\ell\right)^2 = 2500$. Logo $A = 2500a = 2500 \times 35 = 87500 \text{ cm}^2 = 87,5 \text{ m}^2$.
b). Da Física: $R \propto A, L^2$ e $r \propto a, \ell^2$, de modo que

$$\frac{R}{r} = \frac{AV^2}{av^2} = 2500\,\frac{V^2}{v^2} = 2,500\left(\frac{V}{v}\right)^2.$$

Questão 5 –
Consideremos duas circunferências de mesmo centro O, e escolhamos dois pontos distintos, A e B, sobre a maior. Sejam C e D os pontos onde o prolongamento dos segmentos AO e BO cortam, respectivamente, a circunferência menor. São dados *: o raio 50 cm da circunferência maior, e os comprimentos AB = 45 cm, CD = 20 cm.* Pede-se *o raio da circunferência menor.*
Resp.

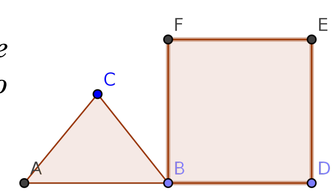


Obviamente, OA = OB = R = 50. Como os triângulos são isósceles, temos AB ∥ CD.
Disso segue, pelo Teorema de Thales:

$$\frac{OA}{OD} = \frac{OB}{OC} = \frac{AB}{CD} \quad \therefore \quad \frac{50}{OD} = \frac{50}{OC} = \frac{45}{20} \quad \therefore \quad OC = \frac{50}{45/20} = \frac{1000}{45} = \frac{200}{9} \cong 22,22 \text{ cm}.$$

Questão 6 –
A idade de um pai vezes o produto das idades de suas duas filhas é igual a 333. Sabendo que a filha mais velha toca piano há quatro anos, qual a idade de sua filha mais nova?
Resp.
Ignorando diferenças de ordem dos fatores, existem apenas duas maneiras de escrevermos 333 como produto de três números inteiros: $333 = 37 \times 9 \times 1$ e $333 = 37 \times 3 \times 3$. Como a filha mais velha deve ter quatro ou mais anos de idade, segue que somos obrigados a escolher a primeira alternativa, ou seja: a filha mais nova tem um ano de idade.

Questão 7 –
Sobre um segmento AD de 15 cm, colocamos lado a lado um triângulo equilátero e um quadrado, conforme mostra a figura. Pergunta-se: é possível fazer isso de modo que o perímetro do triângulo iguale o perímetro do quadrado? Como?



Resp.
Indicando por x o comprimento do lado do quadrado, o lado do triângulo mede $15 - x$, de modo que temos: $4x = 3(15 - x)$.Simplificando: $4x = 45 - 3x$, ou $7x = 45$, de modo que $x = 45/7 \cong 6,43$.
Conclusão: observando que $6,43 < 15$, realmente o problema tem solução: é só tomarmos um quadrado de lado $45/7 \cong 6,43$ cm e um triângulo equilátero de lado $15 - 45/7 = 60/7 \cong 8,57$ cm.

Questão 8 –
Mostrar que sempre que somarmos 1 ao produto de quatro inteiros positivos e consecutivos resulta um inteiro que é um quadrado.
Resp.
$1 + n(n+1)(n+2)(n+3) = k^2$, para algum número inteiro k?
No que segue, assinalaremos com um $\overset{*}{=}$ as passagens onde se usa a identidade básica $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

$$\begin{aligned} 1 + n(n+1)(n+2)(n+3) &= 1 + (n^2+n)(n+2)(n+3) = 1 + (n^2+n)(n^2+5n+6) \\ &= n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n + 1 = (n^4 + 6n^3 + 9n^2) + (2n^2 + 6n + 1) \\ &\overset{*}{=} (n^2+3n)^2 + 2(n^2+3n) + 1 \overset{*}{=} \left[(n^2+3n)+1\right]^2. \end{aligned}$$