Questões nível 2

Questão 1 –
A partir de um primeiro número inteiro, construímos sucessivamente uma sequência de infinitos inteiros usando a seguinte regra: "cada novo número da sequência é igual à soma dos quadrados de cada dígito da representação decimal do último número da sequência". Exemplo: tomando como primeiro número 5382, o segundo será $5^2+3^2+8^2+2^2=102$, *o terceiro* $1^2+0^2+2^2=5$, *o quarto 25, etc.*
Pergunta-se: tomando 1248 como primeiro número, quem será o 2014-ésimo número da sequência?
Resp.
Gerando os primeiros termos da sequência, obtemos:

$$184 \quad 85 \quad 89 \quad 145 \quad 42 \quad 20 \quad 4 \quad 16 \quad 37 \quad 58 \quad 89 \quad \cdots$$

a repetição do elemento 89 indica que, a partir do terceiro termo, a sequência consiste na repetição sucessiva do bloco dos seguintes oito números: 89 145 42 20 4 16 37 58. A partir de $2014 = 8\times 250+6$, que devemos escrever como $2014 = 2+250\times 8+4$, segue que o 2014-ésimo elemento da sequência está na quarta posição do 251-ésimo bloco, ou seja: este elemento é o número 20.

Questão 2 –
Antes das eleições, o preço P de uma mercadoria foi baixado em a%, e depois das eleições foi aumentado em b% o que fêz seu preço voltar ao valor original P. Pede-se fórmula dando o valor de b em termos de a.
Resp.

$$\left(1-\frac{a}{100}\right)\left(1+\frac{b}{100}\right)=1 \quad \therefore \quad (100-a)(100+b)=10\,000 \quad \therefore \quad 100b-ab=100a \quad \therefore \quad b=\frac{100a}{100-a}\cdot$$

Questão 3 –
Foi construído um modelo em escala reduzida de 1:50 de um navio. Em laboratório, verificou-se que a área molhada do modelo mede 35 cm^2. Pede-se:

a). a área molhada do navio em metros quadrados
b). relacionar a "razão R/r das resistências oferecidas pela água ao movimento do navio e modelo" com a "razão V/v das respectivas velocidades de movimento". Para isso, usar que a Física ensina que a resistência oferecida pela água é diretamente proporcional a área da secção transversal do objeto em movimento e diretamente proporcional ao quadrado de sua velocidade.

Resp.
a). Indicaremos por maiúsculas as variáveis do navio e por minúsculas as do modelo. Foi dado que $L/\ell = 50/1$, e como $A \propto L^2$ e $a \propto \ell^2$, da semelhança entre as figuras navio e modelo segue que $A/a = L^2/\ell^2 = (L/\ell)^2 = 2\,500$. Logo $A = 2\,500a = 2\,500\times 35 = 87\,500 \text{ cm}^2 = 87{,}5 \text{ m}^2$.
b). Da Física: $R \propto A, L^2$ e $r \propto a, \ell^2$, de modo que

$$\frac{R}{r}=\frac{AV^2}{av^2}=2\,500\,\frac{V^2}{v^2}=2{,}500\left(\frac{V}{v}\right)^2.$$

Questão 4 –
A idade de um pai vezes o produto das idades de suas duas filhas é igual a 333. Sabendo que a filha mais velha toca piano há quatro anos, qual a idade de sua filha mais nova?
Resp.
Ignorando diferenças de ordem dos fatores, existem apenas duas maneiras de escrevermos 333 como produto

de três números inteiros: $333 = 37 \times 9 \times 1$ e $333 = 37 \times 3 \times 3$. Como a filha mais velha deve ter quatro ou mais anos de idade, segue que somos obrigados a escolher a primeira alternativa, ou seja: a filha mais nova tem um ano de idade.

Questão 5 –

Seja ABC um triângulo retângulo de lados $AC = 7,2$ cm e $BC = 5,4$ cm e ângulo reto no vértice C. No lado AC, tomar o ponto M tal que $MC = 1,2$ cm, e por tal M traçar uma perpendicular a AC até cortar o lado AB num ponto N.

Pede-se o comprimento de todos os lados do triângulo AMN.

Resp.

Iniciamos observando que, por Pythagoras: $AB = \sqrt{BC^2 + AC^2} = \sqrt{5,4^2 + 7,2^2} = \sqrt{29,16 + 51,84} = \sqrt{91} = 9$. Vamos aos lados pedidos. Obviamente, $AM = AC - MC = 7,2 - 1,2 = 6$. Para os demais lados, observe que os segmentos BC e MN são perpendiculares ao lado AC, logo $BC \parallel MN$. Esse paralelismo possibilita aplicarmos o Theorema de Thales, o qual nos fornece a proporção

$$\frac{AB}{AN} = \frac{AC}{AM} = \frac{BC}{MN} \quad \therefore \quad \frac{9}{AN} = \frac{7,2}{6} = \frac{5,4}{MN} \quad \therefore \quad \frac{9}{AN} = 1,2 = \frac{5,4}{MN},$$

de onde tiramos: $AN = 9/1,2 = 7,5$ e $MN = 5,4/1,2 = 4,5$.

Questão 6 –

a). Provar que para cada número racional pode-se achar dois outros racionais à mesma distância dele.
b). Provar que nenhum número irracional é equidistante de dois racionais.

Resp.

a). Sendo r um número racional, como a soma de racionais é um racional, $r - 1$ e $r + 1$ também são racionais e estão à mesma distância de r.

b). Dizer que um número real x está à mesma distância de dois outros reais, equivale a dizer que x é a média aritmética desses dois reais. Também é imediato que a média de dois números *racionais* é um número racional. Com essas duas observações, resolve-se o problema.

Com efeito, sendo i um número irracional, se existissem dois racionais à mesma distância dele, teríamos que i seria a média desses racionais e, então, também seria racional, o que é uma contradição. Logo, é impossível existirem dois racionais equidistantes de um irracional.

Questão 7 –

Seja a função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dada por $f(n) = n + 3$ para os n ímpares, e por $f(n) = n/2$ para os n pares.

Pede-se provar que existe exatamente um k ímpar tal que $f(f(f(k))) = 27$. Feito isso, achar a soma dos dígitos da representação decimal de tal k.

Resp.

Vamos usar que par+par = par, par+ímpar = ímpar e ímpar+ímpar = par.

$\big[$Como 27 é ímpar, $f(f(f(k))) = 27\big] \Rightarrow \big[f(f(k))$ não pode ser ímpar, logo é par$\big] \Rightarrow \big[$ (como $54/2 = 27$) $f(f(k)) = 54$ $\big] \Rightarrow \big[$ $f(k) = 51$ ou $f(k) = 108$; mas, como estamos procurando um k ímpar, a primeira posibilidade fica descartada, logo $f(k) = 108$ $\big] \Rightarrow \big[$ $k = 105$ ou $k = 216$; mas, como estamos procurando k ímpar, a segunda possibilidade fica descartada, logo $k = 105\big]$.

Resumindo: $\big[k$ ímpar e $f(f(f(k))) = 27\big] \Rightarrow k = 105$. Ou seja, ou $f(f(f(k))) = 27$ é verificada por $k = 105$, ou nenhum outro ímpar tem essa propriedade. Ora, calculando diretamente, temos $f(f(f(105))) = f(f(108)) = f(54) = 27$, de modo que, efetivamente, $f(f(f(k))) = 27$ é verificada por *exatamente* um k ímpar, o $k = 105$.

Conclusão: $\big[k$ ímpar e $f(f(f(k))) = 27\big] \iff k = 105$.

Soma dos dígitos = 1+ 0 +5 = 6.

Questão 8 –

Sejam dois polinômios distintos *, de coeficientes reais e da forma* $p(x) = x^2 + ax + b$, $q(x) = x^2 + Ax + B$. *Supondo que eles verifiquem* $p(7) + p(11) = q(7) + q(11)$, *pede-se:*

a). provar que $p(9) = q(9)$*;*
b). provar que se existir $y \neq 9$ *tal que* $p(y) = q(y)$, *então* $p(x) = q(x)$, *para todos os* $x \in \mathbb{R}$.

Resp.
a). $p(7) + p(11) = q(7) + q(11) \Rightarrow 49 + 7a + b + 121 + 11a + b = 49 + 7A + B + 121 + 11A + B \Rightarrow 18a + 2b = 18A + 2B \Rightarrow 9a + b = 9A + B$. Logo: $p(9) = 81 + 9a + b = 81 + 9A + B = q(9)$.
b). Supondo exista $y \neq 9$ tal que $p(y) = q(y)$, então $y^2 + ay + b = y^2 + Ay + B$, logo $ay + b = Ay + B$. Como também vale $9a + b = 9A + B$, por subtração obtemos $a(y-9) = A(y-9)$. Ora, $y \neq 9$, logo $y - 9 \neq 0$, e daí $a(y-9) = A(y-9) \Rightarrow a = A$. Com isso, $p(y) = q(y)$ fica $y^2 + ay + b = y^2 + ay + B$, de modo que $b = B$. Resumindo: $p(x) = x^2 + ax + b = x^2 + Ax + B = q(x)$, para todo os x.