ORM Grande PoA/2014

Olimpíada Regional de Matemática da Grande Porto Alegre olimatrsgoo@gmail.com

Questões nível 3

Questão 1 –

Antes das eleições, o preço P de uma mercadoria foi baixado em a%, e depois das eleições foi aumentado em b% o que fêz seu preço voltar ao valor original P. Pede-se fórmula dando o valor de b em termos de a.

Resp.

$$\left(1-\frac{a}{100}\right)\left(1+\frac{b}{100}\right)=1 \quad \therefore \quad (100-a)(100+b)=10000 \quad \therefore \quad 100b-ab=100a \quad \therefore \quad b=\frac{100a}{100-a}.$$

Questão 2 –

A soma dos comprimentos das 12 arestas de uma caixa de faces retangulares vale 140, e a distância entre os dois vértices mais afastados da caixa vale 21. Qual a área da superfície da caixa?

Resp.

Indicando por a,b,c os comprimentos das arestas da caixa, temos $4(a+b+c)=140$, logo $a+b+c=60$. A diagonal maior da caixa vale $21=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$, de modo que $a^2+b^2+c^2=441$. A área $\mathscr{A}$ da superfície da caixa é dada por $\mathscr{A}=2(ab+bc+ac)$. Temos, então:

$$1225=35^2=(a+b+c)^2=a^2+2a(b+c)+(b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2bc+2ac+2ab=441+\mathscr{A},$$

logo $1225=441+\mathscr{A}$ e daí $\mathscr{A}=1225-441=784$.

Questão 3 –

Foi construído um modelo em escala reduzida de 1:50 de um navio. Em laboratório, verificou-se que a área molhada do modelo mede 35 cm^2. Pede-se:

- *a). a área molhada do navio em metros quadrados*
- *b). relacionar a "razão R/r das resistências oferecidas pela água ao movimento do navio e modelo" com a "razão V/v das respectivas velocidades de movimento". Para isso, usar que a Física ensina que a resistência oferecida pela água é diretamente proporcional a área da secção transversal do objeto em movimento e diretamente proporcional ao quadrado de sua velocidade.*

Resp.

a). Indicaremos por maiúsculas as variáveis do navio e por minúsculas as do modelo. Foi dado que $L/\ell=50/1$, e como $A\propto L^2$ e $a\propto \ell^2$, da semelhança entre as figuras navio e modelo segue que $A/a=L^2/\ell^2=\left(L/\ell\right)^2=2500$. Logo $A=2500a=2500\times 35=87500\ \text{cm}^2=87{,}5\ \text{m}^2$.

b). Da Física: $R\propto A, L^2$ e $r\propto a,\ell^2$, de modo que

$$\frac{R}{r}=\frac{AV^2}{av^2}=2500\,\frac{V^2}{v^2}=2{,}500\left(\frac{V}{v}\right)^2.$$

Questão 4 –

- *a). Provar que para cada número racional pode-se achar dois outros racionais à mesma distância dele.*
- *b). Provar que nenhum número irracional é equidistante de dois racionais.*
- *c). Um número real é dito ser* torto *se ele não estiver equidistante de nenhum par de números racionais. Pede-se provar que o conjunto dos números tortos é igual ao conjunto dos números irracionais.*

Resp.

a). Sendo r um número racional, como a soma de racionais é um racional, $r-1$ e $r+1$ também são racionais e estão à mesma distância de r.

b). Dizer que um número real x está à mesma distância de dois outros reais, equivale a dizer que x é a média

aritmética desses dois reais. Também é imediato que a média de dois números *racionais* é um número racional. Com essas duas observações, resolve-se o problema.
Com efeito, sendo i um número irracional, se existissem dois racionais à mesma distância dele, teríamos que i seria a média desses racionais e, então, também seria racional, o que é uma contradição. Logo, é impossível existirem dois racionais equidistantes de um irracional.
c). Por (b), todo irracional é torto. Reciprocamente, todo tordo tem de ser irracional, pois caso contrário teria de ser racional e então, por (a), ele seria equidistante de dois racionais, o que seria um absurdo frente à definição de torto.

Questão 5 –

Seja a função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dada por $f(n) = n+3$ para os n ímpares, e por $f(n) = n/2$ para os n pares.
Pede-se provar que existe exatamente um k ímpar tal que $f(f(f(k))) = 27$. Feito isso, achar a soma dos dígitos da representação decimal de tal k.
Resp.
Vamos usar que par+par = par, par+ímpar = ímpar e ímpar+ímpar = par.
Temos $27 = 24+3$ e $27 = 54/2$, mas como 24 é par, segue que: $\left[f(f(f(k))) = 27\right] \Rightarrow \left[f(f(k)) = 54\right] \Rightarrow \left[f(k) = 51\right.$ ou $f(k) = 108$; mas, como estamos procurando um k ímpar, a primeira posibilidade fica descartada, logo $\left.f(k) = 108\ \right] \Rightarrow \left[\ k = 105\right.$ ou $k = 216$; mas, como estamos procurando k ímpar, a segunda possibilidade fica descartada, logo $\left.k = 105\right]$.
Resumindo: $\left[k \text{ ímpar e } f(f(f(k))) = 27\right] \Rightarrow \left[k = 105\right]$. Ou seja, ou $f(f(f(k))) = 27$ é verificada por $k = 105$, ou nenhum outro ímpar tem essa propriedade. Ora, calculando diretamente, vemos que, efetivamente, $f(f(f(k))) = 27$, pois $f(f(f(105))) = f(f(108)) = f(54) = 27$. Logo, $f(f(f(k))) = 27$ é verificada por um, e somente um, k ímpar, o $k = 105$. Conclusão: $\left[k \text{ ímpar e } f(f(f(k))) = 27\right] \iff k = 105$.
Soma dos dígitos = 1+ 0 +5 = 6.

Questão 6 –

Para $p(x)$ um polinômio de grau n, considere a afirmação: "se os coeficientes de p(x) são números inteiros, então o valor de $p(x)$ é número inteiro para cada x inteiro". Pede-se:
  a). escrever a recíproca dessa afirmação;
  b). para cada valor de $n \geqslant 1$, demonstrar se tal recíproca é verdadeira, ou falsa.

Resp.
a). "Se o valor de um polinômio $p(x)$ for um número inteiro, para cada x inteiro, então os coeficientes deste polinômio são números inteiros."
b). Para grau $n = 1$ a recíproca é verdadeira. Com efeito, de $p(x) = a + bx$ segue $p(0) = a$, logo a é inteiro, e de $p(1) = a + b$ segue $b = p(1) - a$ = inteiro - inteiro = inteiro.
Para $n = 2$ a recíproca é falsa. Contraexemplo: $p(x) = x(x+1)/2 = x/2 + x^2/2$ sempre tem valor inteiro, se x for inteiro. Para $n \geqslant 3$ a recíproca também é falsa. Contraexemplo: $p(x) = x^n + x(x+1)/2$.

Questão 7 –

Expresse o valor de $(1+u)^{80}$ como um número inteiro, se

$$u = \frac{4}{(1+\sqrt{5})\cdot(1+\sqrt[4]{5})\cdot(1+\sqrt[8]{5})\cdot(1+\sqrt[16]{5})}.$$

Resp. (pelo aluno Guilherme Kowalczuk)
Para facilitar a notação, definamos $y = \sqrt[16]{5}$. Usando sucessivamente a identidade $(1+a)(1-a) = (1-a^2)$, vemos que u pode ser escrita como

$$u=\frac{4}{(1+y^8)(1+y^4)(1+y^2)(1+y)}=\frac{4(1-y)}{(1+y^8)(1+y^4)(1+y^2)(1-y^2)}=\frac{4(1-y)}{(1+y^8)(1+y^4)(1-y^4)}=\cdots=\frac{4(1-y)}{(1-y^{16})}\,.$$

De modo que

$$u=\frac{4(1-y)}{(1-y^{16})}=\frac{4(1-y)}{(1-5)}=y-1 \quad\therefore\quad 1+u=y \quad\therefore\quad (1+u)^{80}=y^{80}=5^{80/16}=5^5=3125\,.$$

Questão 8 –

José decidiu estimar o tempo que está gastando em videogames e descobriu que

- *se jogar num certo dia, há probabilidade de 60% de não jogar no dia seguinte;*
- *se não jogar num dado dia, a probabilidade de ele jogar no dia seguinte é de 90%.*

Procurando enfrentar esse vício, iniciou o semestre letivo sem jogar no primeiro dia.

Pede-se a probabilidade $j(n)$ de ele jogar no n-ésimo dia do semestre, bem como seu valor a longo prazo (o valor limite de $j(n)$, ao n crescer indefinidamente).

Resp.

Em vez de se procurar expressar $j(n)$ diretamente em termos de n, relacionemos $j(n)$ com $j(n+1)$:

$$j(n+1)=0,4\,j(n)+0,9(1-j(n)) \quad\therefore\quad j(n+1)=0,9-0,5\,j(n)\,.$$

Desenrolando essa recursão, iremos obter $j(n)$ em termos de n:

$j(1)=0$ (pois José não jogou no primeiro dia)

$j(2)=0,9-0,5j(1)=0,9-0,5\times 0=0,9$

$j(3)=0,9-0,5j(2)=0,9-0,5\times 0,9=0,9\big[1-0,5\big]$

$j(4)=0,9-0,5j(3)=0,9-0,5\times 0,9\big[1-0,5\big]=0,9\big[1-0,5+0,5^2\big]$

$j(5)=0,9-0,5j(4)=0,9-0,5\times 0,9\big[1-0,5+0,5^2\big]=0,9\big[1-0,5+0,5^2-0,5^3\big]$

sendo imediato de se concluir que, para todos os $n\geqslant 3$, temos:

$$j(n)=0,9\big[1+(-0,5)+(-0,5)^2+(-0,5)^3+\cdots+(-0,5)^{n-2}\big]=0,9\;\frac{1-(-0,5)^{n-2+1}}{1-(-0,5)}=\tfrac{9}{15}\left[1-(-0,5)^{n-1}\right].$$

Como $0<0,5<1$, segue que $(-0,5)^{n-1}\to 0$ (ao $n\to+\infty$), de modo que $j(n)\to 9/15=0,6$ (ao $n\to+\infty$). Ou seja, a longo prazo haverá 60% de chance de José jogar num dado dia.