Seção 20: Equação de Laplace

Notação. Se $u = u(x, y)$ é uma função de duas variáveis, representamos por Δu, ou ainda, por $\nabla^2 u$ a expressão
$$\Delta u = \nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy},$$
chamada de *laplaciano* de u. No caso de função de três variáveis, o laplaciano é dado por
$$\Delta u = \nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$$
e analogamente para funções de mais variáveis.

Equação de Laplace: A *equação de Laplace* é a equação $\Delta u = 0$. Em dimensão 2, a equação de Laplace é
$$u_{xx} + u_{yy} = 0.$$
Em dimensão 3, a equação de Laplace é
$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0.$$

Exemplos de soluções da equação de Laplace em dimensão 2 são $u(x, y) = e^x \cos y$ e $v(x, y) = e^x \operatorname{sen} y$. Note que estas duas funções são a parte real e a parte imaginária da função $f(z) = e^z = e^{x+iy}$. Para outras funções $f(z)$ obtemos outros exemplos de funções que são soluções da equação de Laplace:

$$f(z) = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy \quad \longrightarrow \quad u(x, y) = x^2 - y^2 \text{ e } v(x, y) = 2xy.$$
são soluções da equação de Laplace

$$f(z) = z^3 = (x + iy)^3 \quad \longrightarrow \quad u(x, y) = x^3 - 3xy^2 \text{ e } v(x, y) = 3x^2y - y^3.$$
são soluções da equação de Laplace

Exemplos. Exemplos de situações em que a equação de Laplace aparece:

(i) Fluxo estacionário de calor em uma placa. Consideremos uma placa condutora de calor localizada em uma região $D \subseteq \mathbb{R}^2$ limitada por uma curva fechada γ. Usando as leis da condução do calor, pode-se mostrar que a temperatura $u = u(x, y, t)$ satisfaz a EDP $u_t = c^2 \Delta u$, chamada de *equação do calor*, onde $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$ é o laplaciano de u. Depois de transcorrido um tempo muito grande, se a temperatura atingir o regime estacionário, isto é, u independente de t, então $u_t = 0$ e a equação do calor toma a forma
$$\Delta u = 0,$$
que é a *equação de Laplace.* Pela mesma razão, para um fluxo de calor estacionário em um sólido, a temperatura u satisfaz a equação de Laplace em dimensão 3
$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0.$$

(ii) Potenciais elétricos ou gravitacionais. Suponhamos que se tenha uma distribuição de cargas elétricas em repouso no espaço, com densidade (carga por unidade de volume) dada por uma função $\rho = \rho(x, y, z)$. Seja $u(x, y, z)$ o potencial elétrico gerado por esta distribuição de cargas no ponto (x, y, z). A Lei de Gauss nos diz que
$$\Delta u = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho.$$

Portanto, em uma região $D \subseteq \mathbb{R}^3$ que não contenha cargas, como $\rho = 0$, vamos ter

$$\Delta u = 0,$$

ou seja, o potencial elétrico satisfaz a equação de Laplace em qualquer região que não contenha cargas. Se a distribuição de cargas tiver simetria plana, colocando o sistema de coordenadas numa posição conveniente, teremos $u = u(x, y, z) = u(x, y)$ independente de z e, portanto, $u_{xx} + u_{yy} = 0$.

Problema de Dirichlet. Seja $D \subseteq \mathbb{R}^2$ uma região limitada por uma curva fechada γ. Dada uma função $f : \gamma \longrightarrow \mathbb{R}$, o *problema de Dirichlet* consiste em procurar uma função $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{em } D \\ u(x,y) = f(x,y), & \text{para } (x,y) \text{ em } \gamma \end{cases}$$

Interpretação Física. Suponhamos que se tenha um fluxo estacionário de calor em uma placa $D \subseteq \mathbb{R}^2$ limitada por uma curva fechada γ. Se conhecemos a temperatura $f(x, y)$ em cada ponto da fronteira γ de D, o problema de Dirichlet consiste em procurar os valores da temperatura $u = u(x, y)$ nos pontos interiores de D.

Exemplo 1. Resolva pelo método de separação de variáveis o problema de Dirichlet abaixo para uma região retangular.

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0\,, & \text{em } \; D: \; 0 < x < a \;,\; 0 < y < b \\ u(0,y) = u(x,0) = u(x,b) = 0 \\ u(a,y) = y \end{cases}$$

Solução: Pelo método de separação de variáveis, começamos procurando u da forma $u(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$. Substituindo na equação de Laplace, obtemos

$$\varphi(x)''\psi(y) + \varphi(x)\psi''(y) = 0$$

Dividindo pelo produto $\varphi(x)\psi(y)$, obtemos

$$\frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = -\frac{\psi''(y)}{\psi(y)}\,.$$

Da mesma forma que para as equações da onda e calor, devemos ter

$$\frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = -\frac{\psi''(y)}{\psi(y)} = \lambda\,.$$

A partir daí, obtemos duas EDO's independentes

$$\varphi''(x) - \lambda\varphi(x) = 0 \tag{1}$$

$$\psi''(y) + \lambda\psi(y) = 0 \tag{2}$$

Conforme já foi explicado para as equações da onda e calor, a partir das condições de fronteira, obtemos

$$\psi(0) = 0\,, \qquad \psi(b) = 0 \tag{3}$$

$$\varphi(0) = 0. \tag{4}$$

Começamos com a EDO (2), pois em (3) temos mais informações para a função ψ do que para φ. Vamos analisar o problema de valor de fronteira de procurar $\psi : [0, b] \to \mathbb{R}$ satisfazendo

$$\begin{cases} \psi''(y) + \lambda\psi(y) = 0 \\ \psi(0) = 0\,, \qquad \psi(b) = 0 \end{cases} \tag{5}$$

Dividindo em casos temos

Caso 1: $\lambda < 0$
Trivial

Caso 2: $\lambda = 0$
Trivial

Caso 3: $\lambda > 0$. Neste caso, $\lambda = \mu^2$, com $\mu > 0$.
Neste caso temos as soluções não triviais

$$\psi_n(y) = B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}\,, \qquad \lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{b^2}\,. \tag{6}$$

Agora, com os λ dados em (6), vamos analisar a equação (1), ou seja,

$$\varphi''(x) - \frac{n^2\pi^2}{b^2}\,\varphi(x) = 0\,.$$

Resolvendo, temos

$$\varphi(x) = Ce^{\frac{n\pi x}{b}} + De^{-\frac{n\pi x}{b}}\,.$$

Utilizando a condição (4), obtemos

$$0 = \varphi(0) = C + D\,.$$

Segue que $D = -C$ e

$$\varphi_n(x) = C_n\Big(e^{\frac{n\pi x}{b}} - e^{-\frac{n\pi x}{b}}\Big) = 2C_n \operatorname{senh} \frac{n\pi x}{b}\,. \tag{7}$$

Multiplicando (6) por (7) e desprezando as constantes desnecessárias, obtemos

$$u_n(x, y) = \varphi_n(x)\psi_n(y) = B_n \operatorname{senh} \frac{n\pi x}{b} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}\,.$$

Por superposição, obtemos

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{senh} \frac{n\pi x}{b} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}\,. \tag{8}$$

Aplicando a condição de fronteira $u(a, y) = y$, obtemos

$$u(a, y) = y = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{senh} \frac{n\pi a}{b} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}\,, \qquad \text{para } 0 \le y \le b.$$

Segue que

$$B_n \operatorname{senh} \frac{n\pi a}{b} = \frac{2}{b}\int_0^b y \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}\, dy\,,$$

ou seja,

$$B_n = \frac{2}{b \operatorname{senh} \frac{n\pi a}{b}} \int_0^b y \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}\, dy\,.$$

Observação. O método de separação de variáveis funcionou bem porque em apenas um dos lados do retângulo foram prescritos valores não nulos para a função u. Se quiséssemos resolver um problema de Dirichlet mais geral para o retângulo

$$(\star)\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0 \ \ , \text{ em } \ D:\ 0<x<a\ ,\ 0<y<b \\ u(x,0)=f_1(x)\,, \\ u(a,y)=f_2(y)\,, \\ u(x,b)=f_3(x)\,, \\ u(0,y)=f_4(y)\,, \end{cases}$$

procuraríamos quatro funções u_1, u_2, u_3 e u_4, respectivamente soluções dos problemas:

$$(\star 1)\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0 \ \ , \text{ em } \ D:\ 0<x<a\ ,\ 0<y<b \\ u(0,y)=u(a,y)=u(x,b)=0 \\ u(x,0)=f_1(x) \end{cases}$$

$$(\star 2)\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0 \ \ , \text{ em } \ D:\ 0<x<a\ ,\ 0<y<b \\ u(0,y)=u(x,0)=u(x,b)=0 \\ u(a,y)=f_2(y) \end{cases}$$

$$(\star 3)\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0 \ \ , \text{ em } \ D:\ 0<x<a\ ,\ 0<y<b \\ u(0,y)=u(a,y)=u(x,b)=0 \\ u(x,b)=f_3(x) \end{cases}$$

$$(\star 4)\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0 \ \ , \text{ em } \ D:\ 0<x<a\ ,\ 0<y<b \\ u(0,y)=u(x,0)=u(x,b)=0 \\ u(0,y)=f_4(y) \end{cases}$$

Estes quatro problemas de Dirichlet mais simples podem ser resolvidos por separação de variáveis seguindo o mesmo procedimento do exemplo acima. Somando suas soluções, a função $u = u_1+u_2+u_3+u_4$ será uma solução do problema $(\star)$.

Outro tipo de condição de fronteira. Se a fronteira toda ou uma parte dela estiver isolada (não passa calor), a condição será $u_n(x,y)=0$ no trecho que estiver isolado, onde $u_n = \dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}$ representa a derivada direcional de u na direção normal à fronteira. A seguir, damos uma explicação simplificada e necessariamente incompleta da razão pela qual a condição matemática

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = 0 \quad \text{em } \gamma$$

expressa o fato de que o trecho da fronteira que ela se cumpre está isolado.

O fluxo de calor se dá preferencialmente na direção de maior variação da temperatura u, que é a direção do gradiente ∇u de u, no sentido de $-\nabla u$. Portanto, para que o calor não atravesse a fronteira da região é preciso que a direção de máxima variação de u não aponte para fora nem para dentro da da região, ou seja, seja tangente ao bordo. Portanto,

$$\vec{n}\cdot\nabla u = 0,$$

onde $\vec{n}$ representa o vetor normal à fronteira e unitário. Mas o produto escalar do gradiente ∇u com um vetor unitário é a derivada direcional de u na direção deste vetor unitário. Chegamos assim a condição $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}} = 0$ em γ.

Problema de Dirichlet em regiões ilimitadas. Quando a região D do problema de Dirichlet for ilimitada, colocamos a condição adicional de que a função deve ser limitada. Para entender a razão disto, vamos dar um exemplo bem simples. Consideremos o semiplano superior $D = \{(x,y) \mid y > 0\}$. Digamos que se queira descobrir a temperatura de regime estacionário em D, sendo prescrita a temperatura no bordo $u(x,0) = 0$. Temos o problema

$$(\star)\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad \text{em } D \\ u(x,0) = 0 \end{cases}$$

Obviamente, mantendo o bordo à temperatura $u(x,0) = 0$, depois de transcorrido um tempo muito grande, a placa inteira deve atingir o equilíbrio na temperatura $u(x,y) = 0$. De fato, a função constante $u(x,y) = 0$ é uma solução de $(\star)$. Mas não é a única. Para qualquer constante C, a função

$$u(x,y) = Cy$$

também é uma solução de $(\star)$. Ou seja, o problema $(\star)$ tem uma infinidade de soluções. Apenas uma delas, para $C = 0$, corresponde à solução do problema físico. Isto significa que o problema $(\star)$ está mal posto. Devemos acrescentar uma condição adicional que sirva para eliminar todas as funções indesejadas da família $u(x,y) = Cy$, exceto a função $u(x,y) = 0$. Uma tal condição corresponde a exigir que a função $u(x,y)$ seja limitada, isto é, que exista uma constante M tal que

$$|u(x,y)| \leq M, \qquad \text{para todo } (x,y).$$

O problema

$$(\star\star)\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad \text{em } D \\ u(x,0) = f(x) \\ u \text{ limitada} \end{cases}$$

tem solução única $u(x,y) = 0$. É como se, no caso e uma região ilimitada, o ponto no infinito fizesse parte da fronteira. É natural então, além de prescrever os valores na fronteira, prescrever também o comportamento da função no infinito. Uma maneira de prescrever este comportamento é exigir que a função permaneça limitada.

Assim, se $D \subseteq \mathbb{R}^2$ é uma região ilimitada do plano e a curva γ é a fronteira de D, dada uma função limitada $f : \gamma \longrightarrow \mathbb{R}$, vamos considerar o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad \text{em } D \\ u(x,y) = f(x,y), \qquad \text{em } \gamma \\ u \text{ limitada} \end{cases}$$

Exemplo 2. Consideremos $f : [0,a] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma dada função. Resolva o problema de Dirichlet na faixa semi-infinita $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y < +\infty$.

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 \ \text{ em } D \\ u_x(0,y) = u_x(a,y) = 0 \\ u(x,0) = f(x) \\ u \text{ limitada} \end{cases}$$

Solução: O início da solução é igual ao Exemplo 1, acima. Pelo método de separação de variáveis, começamos procurando u da forma $u(x,y) = \varphi(x)\psi(y)$ e obtemos

$$\varphi''(x) - \lambda\varphi(x) = 0\,, \tag{9}$$

$$\psi''(y) + \lambda\psi(y) = 0\,. \tag{10}$$

Da mesma forma que nos exemplos já estudados, obtemos as condições de fronteira

$$\varphi'(0) = 0\,, \qquad \varphi'(a) = 0. \tag{11}$$

Começamos analisando o problema de valor de fronteira de procurar $\varphi : [0, a] \to \mathbb{R}$ satisfazendo

$$\begin{cases} \varphi''(x) + \lambda\varphi(x) = 0 \\ \varphi'(0) = 0\,, \qquad \varphi'(a) = 0 \end{cases} \tag{12}$$

Dividindo em casos temos

Caso 1: $\lambda < 0$
Trivial

Caso 2: $\lambda = 0$
Neste caso a EDO fica $\varphi''(x) = 0$. Segue que $\varphi'(x) = A$. A partir das condições de fronteira $\varphi'(0) = \varphi'(a) = 0$, concluímos que $A = 0$. Portanto, $\varphi'(x) = 0$. Obtemos a solução não trivial

$$\varphi_0(x) = B_0\,, \qquad \lambda_0 = 0\,. \tag{13}$$

Caso 3: $\lambda > 0$. Neste caso, $\lambda = \mu^2$, com $\mu > 0$.
Neste caso, como em vários outros exemplos que já fizemos, as soluções não triviais são

$$\varphi_n(x) = A_n \cos\frac{n\pi x}{a}\,, \qquad \lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{a^2}\,. \tag{14}$$

Agora, com os λ dados em (13) e (14), vamos analisar a equação (10).

Para $\lambda_0 = 0$, a equação fica $\psi''(y) = 0$ e tem a solução

$$\psi(y) = C_0 + D_0 y\,.$$

Mas para satisfazer a condição de u ser limitada, vamos exigir que ψ seja limitada. Como $\psi : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, então devemos ter $D_0 = 0$. Obtemos

$$\psi_0(y) = C_0\,. \tag{15}$$

Para $\lambda_n = \dfrac{n^2\pi^2}{a^2}$, a equação (10) fica $\psi''(y) - \dfrac{n^2\pi^2}{a^2}\,\psi(y) = 0$, cuja solução é

$$\psi_n(y) = C_n e^{\frac{n\pi y}{a}} + D_n e^{-\frac{n\pi y}{a}}\,.$$

Pela mesma razão que acima, ψ deve ser limitada. Como o domínio é a semi-reta $[0, \infty)$, a exponencial $e^{\frac{n\pi y}{a}}$ é ilimitada pois $\lim\limits_{y\to+\infty} e^{\frac{n\pi y}{a}} = +\infty$. Nesse domínio, a exponencial $e^{-\frac{n\pi y}{a}}$ é limitada, com $|e^{-\frac{n\pi y}{a}}| \le 1$. Segue que devemos ter $C_n = 0$. Logo,

$$\psi_n(y) = D_n e^{-\frac{n\pi y}{a}}\,. \tag{16}$$

Combinando (13), (14), (15) e (16), obtemos

$$u_0(x, y) = B_0$$

e

$$u_n(x, y) = A_n e^{-\frac{n\pi y}{a}} \cos\frac{n\pi x}{a}\,.$$

Por superposição, obtemos

$$u(x, y) = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\frac{n\pi y}{a}} \cos\frac{n\pi x}{a}\,. \tag{17}$$

Para $y = 0$, temos

$$f(x) = u(x,0) = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\frac{n\pi x}{a}\,, \qquad \text{para } 0 \leq x \leq a,$$

que é a expansão de f em série de Fourier-cosseno. A constante B_0 está fazendo o papel do coeficiente $\frac{a_0}{2}$. Portanto,

$$B_0 = \frac{1}{a}\int_0^a f(x)\,dx \tag{18}$$

e

$$A_n = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\,\cos\frac{n\pi x}{a}\,dx\,. \tag{19}$$

Portanto, a solução do problema é dada pela série (17), com os coeficientes dados por (18) e (19).